Cours: électrocinétique

Enseignant: A. AZRAR

Electrocinétique

❖ Circuits linéaires en régime stationnaire

- ➢ Densité de courant, Intensité.
- ➢ Conductivité, résistivité, résistance.
- ➢ Générateurs de tension, Générateurs de courant.
- ➢ Lois de Kirchhoff, Théorème de superposition, Théorème de Thévenin, Théorème de Norton. Relation de Millman.

❖ Circuits linéaires en régime variable (sinusoïdal)

- ➢ Courants variables et courants alternatifs dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.
- ➢ Régime propre, constante de temps, régime forcé.
- ➢ Représentation de Fresnel, représentation complexe, impédance complexe.
- ➢ Puissances active et réactive, Facteurs de puissance, de qualité, résonnance.

Définitions

- **L'électrocinétique** est la partie de l'électromagnétisme traitée en utilisant des courants et des tensions. Un courant électrique correspond à un déplacement ordonné de charges électriques

Les porteurs de charges peuvent être:

- des électrons libres dans les métaux ;

- des ions (cations et anions) dans les solutions électrolytiques.

Vecteur Densité de courant

On définit le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point du milieu par : $\vec{j} = \rho\vec{v}$

$\vec{v}$: la *vitesse moyenne* de l'ensemble des électrons et ρ: la charge volumique du milieu

puisque $\rho = -ne$ où n est le nombre d'électrons par unité de volume et e la valeur absolue de la charge de l'électron:

$$\vec{j} = -ne\vec{v}$$

Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrostatique local.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

La loi d'Ohm dans sa forme locale, valable en tout point du conducteur

σ : est appelé la **conductivité électrique** du matériau.

Elle s'exprime en siemens par mètre $(s\ m^{-1})$.

La conductivité est une grandeur locale positive, dépendant uniquement des propriétés du matériau.

Loi d'Ohm microscopique (ou locale)

On définit également la **résistivité** η du milieu par la relation :

$$\eta = \frac{1}{\sigma}$$

Unités de la résistivité est Ohm mètre ($\Omega\, m$).

La mobilité des chargues μ est définie par la relation :

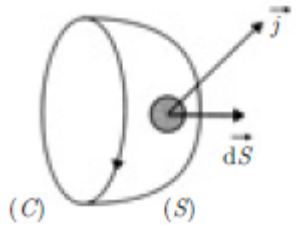
$$\mu = \frac{\sigma}{nq}$$

La mobilité des porteurs définie ainsi est une grandeur algébrique, qui a le même signe de la charge q. Elle s'exprime en $m^2 V^{-1} s^{-1}$

Intensité du courant électrique

Soit le flux de $\vec{j}$ à travers une surface (S) orientée (s'appuyant sur un contour (C) orienté).

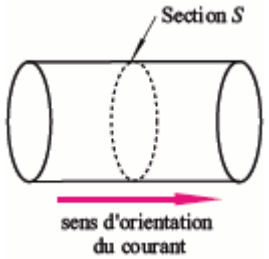
$$\Phi = \int_S \vec{j}.\overrightarrow{ds}$$



- Le flux élémentaire

$$d\Phi = \vec{j}.\overrightarrow{ds} = \rho\vec{v}.\overrightarrow{ds}$$

Dans un circuit électrique, l'intensité mesure le nombre de « porteurs de charges » qui traversent la section *S* du circuit par unité de temps.



- L'intensité du courant correspond au débit de charges.

$$\int_S \vec{j}.\overrightarrow{ds} = \frac{dq}{dt} = i$$

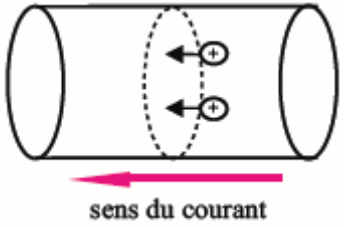
$$i = \frac{dq}{dt}$$

i : intensité du courant (A)
dq : charge élémentaire électrique traversant la section S d'un circuit (C)
dt : temps pendant lequel la surface S est parcourue par la quantité de charge dq (s)

Convention- courant électrique

Le courant est une grandeur algébrique : il peut être positif ou négatif.

Par convention, le courant circule dans le sens du déplacement des charges positives.



Dans un circuit électrique, on fixe le sens d'orientation du courant. Le courant circule de la borne + vers la borne – à l'extérieur du générateur, ce qui correspond à i>0

L'intensité du courant se mesure avec un ampèremètre, branché en série, dont le symbole est :

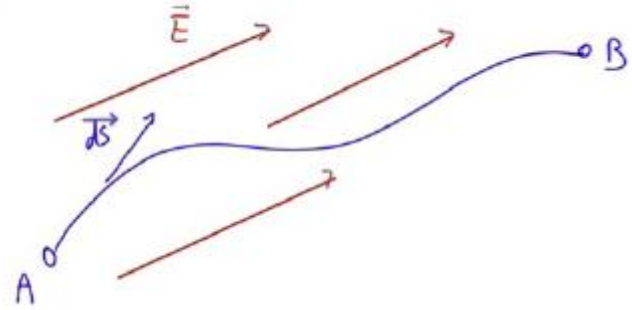
La valeur affichée se donne en Ampère, noté A, en hommage à André-Marie Ampère (1775 – 1836). Les valeurs peuvent varier de quelques milliampères à quelques ampères.

Convention- tension électrique

Tension

On définit la différence de potentiel, $V_A - V_B$ comme étant

la circulation du champ électrique le long du contour reliant A à B



$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = U_{AB}$$

La tension U_{AB} est égale à la différence de potentiel (ddp) entre les points A et B

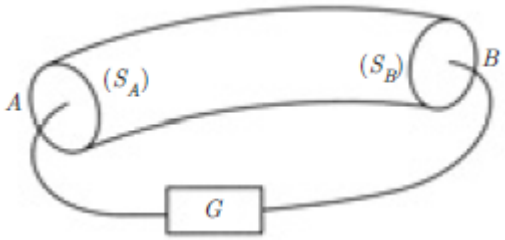
On représente la tension U_{AB} par une flèche, orientée de B vers A.

Dans un circuit électrique, la tension se mesure avec un voltmètre, branché en dérivation, dont le symbole est :

La valeur affichée se donne en Volt, noté V, en hommage à Alessandro Volta (1745-1827).

Résistance d'un conducteur : loi d'Ohm macroscopique

Considérons un conducteur limité par deux sections (S_A) et (S_B), portées respectivement aux potentiels V_A et V_B, grâce à un générateur (G) fermant le circuit.



$$U_{AB} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B \frac{\vec{J}}{\sigma}.\overrightarrow{dl}$$

En régime stationnaire on peut définir la densité de courant en un point comme :

$$J = \frac{I}{S}$$

On a donc :

$$U_{AB} = \frac{I}{\sigma}\int_A^B \frac{dl}{S}$$

En introduisant la résistance R du conducteur donnée par :

$$R = \frac{1}{\sigma}\int_A^B \frac{dl}{S}$$

qui s'exprime en ohms Ω, on obtient la **loi d'Ohm macroscopique**.

$$U_{AB} = V_A - V_B = \mathrm{RI}$$

Approximation des Régimes Quasi Stationnaires : A.R.Q.S

Définition

Cette approximation consiste à dire que quel que soit le régime, l'intensité du courant est la même en tout point d'une branche de circuit.

Validité

Cette approximation est valable pour un régime variable si le temps caractéristique de sa variation (τ pour la charge ou décharge d'un condensateur, T pour un signal sinusoïdal imposé par un GBF) est grand devant le temps de propagation de l'intensité $\tau_i = \frac{L}{c}$.

Dans tout ce qui suit, on considérera les conditions de l'ARQS réalisées.

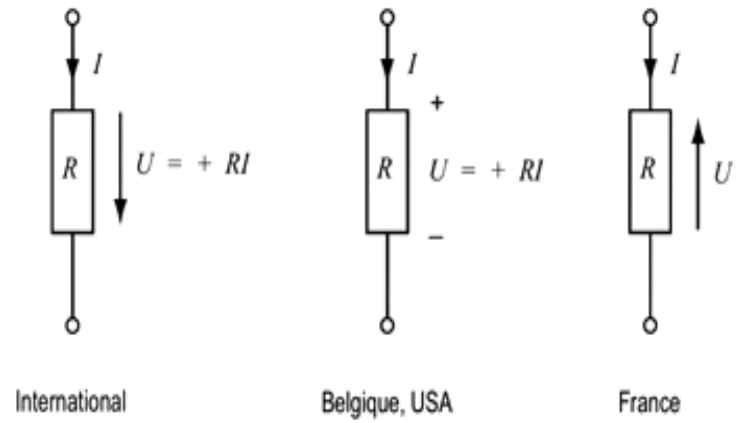
Approximation des Régimes Quasi Stationnaires : A.R.Q.S

Nous nous intéresserons à deux régimes permanents :

Régime	propriétés	Notation
Régime continu	L'intensité et la tension sont constantes	En majuscule: - Intensité I - Tension U
Régime sinusoïdale permanent	L'intensité et la tension sont des fonctions périodiques sinusoïdales: $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ Avec: I_0 : Amplitude (A) U_0 : Amplitude (V) ω: pulsation (rad/s)	En minuscule: - Intensité i(t) - Tension u(t)

Convention courant-tension

Convention relative au sens de courant et au sens de référence de tension



i: Courant instantané

$\underline{i}$: Courant instantané complexe

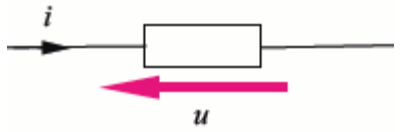
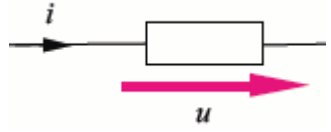
I: Courant efficace ou continu

$\hat{I}$: Courant de crête (valeur maximum)

$\overline{I}$: Valeur moyenne

$\underline{I}$: Phaseur efficace

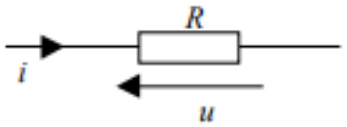
i^1: 1 er harmonique

Convention récepteur	Convention générateur
Les flèches représentant u et i sont en sens inverse 	Les flèches représentant u et i sont dans le même sens 

Lois fondamentales de l'électricité

Loi D'Ohm on convention récepteur

Résistance



$$U_{AB} = R_{AB}\, I \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$$

Remarques

- **La conductance** d'une "résistance" est la grandeur G telle que : $G = \frac{1}{R}$

G et s'exprime en Siemens (s).

- Un conducteur idéal sera supposé avoir une résistance nulle : $R = 0$.

Exemple:

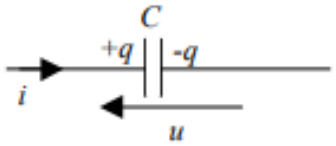
un fil conducteur ($R = 0$)

Lois fondamentales de l'électricité

Convention récepteur

Condensateur

Symbole



Propriété C capacité

$$C = \frac{Q}{u_{AB}} \qquad \text{Unité : Farad F} \qquad 1F = \frac{1As}{V}$$

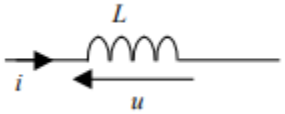
$$Q = \int i\,dt \;; \quad u = \frac{1}{C}\int i\,dt \qquad ou \qquad i = C\frac{du}{dt}$$

Convention générateur

$$i = -C\frac{du}{dt}$$

Convention récepteur

Inductance

Symbole : 

$$u_L = L\frac{di}{dt}$$

Remarque: Cette relation vient de l'expression du flux du champ magnétique et de la loi de Faraday qui seront vues en magnétostatique :

$$\Phi = L\,i\;et\;u = \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

L : unité en **henry (**H)

Convention générateur

$$u_L = -L\frac{di}{dt}$$

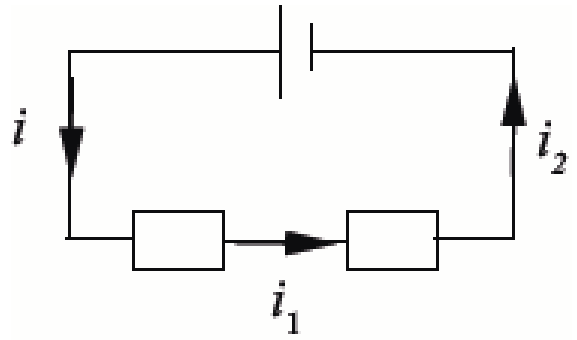
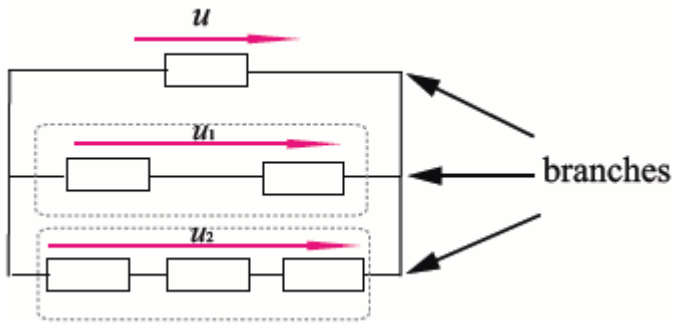
Lois fondamentales de l'électricité

Nœuds, Branche et Mailles

Nœud : n, point de convergence de trois conducteurs ou plus

Branche : b, éléments situés entre deux nœuds parcouru par le même courant

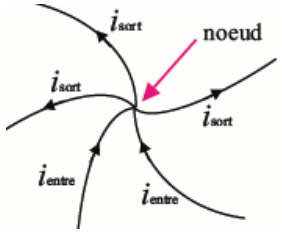
Maille : m, ensemble de branches parcourus en partent d'un nœud pour y revenir

Loi d'unicité de l'intensité	Loi d'unicité des tensions
	
L'intensité est la même en tout point d'un circuit en série: i $= i_1 = i_2$	Les tensions aux bornes de branches parallèles sont égales : u $= u_1 = u_2$

Lois fondamentales de l'électricité

Lois de Kirchhoff

Loi des nœuds

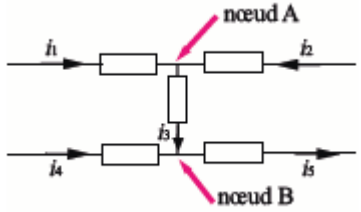


La somme des courants qui entrent par un nœud est égale à la somme des courants qui en sortent: $\sum i_{entre} = \sum i_{sort}$

Cela traduit la conservation de la charge.

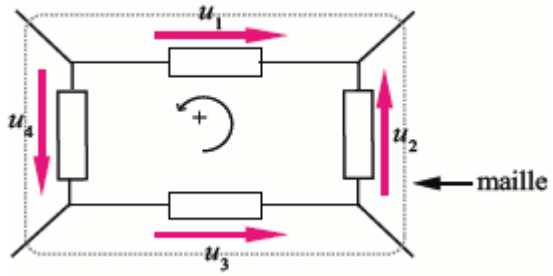
Exemple:

$$\left.\begin{array}{l} Noeud\ A: i_1 + i_2 = i_3 \\ Noeud\ B: i_3 + i_4 = i_5 \end{array}\right\}$$



$$\Rightarrow i_1 + i_2 + i_4 = \iota_5$$

Loi des mailles ou loi d'additivité des tensions



Dans une maille orientée, la somme des tensions est nulle : $\sum_{maille} \varepsilon_i u_i = 0$

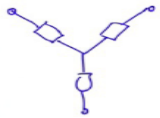
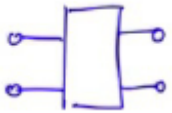
$\varepsilon_i = +1$: si la tension est orientée dans le sens de la maille.

$\varepsilon_i = -1$: si la tension est orientée dans le contraire de la maille.

On peut donc écrire :

$$-u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$$

Principaux éléments de circuit

Dipôle	
Tripôles	
Quadripôles	

- Un dipôle est un composant comportant deux bornes, placé dans un circuit électrique.
- Un dipôle est dit linéaire lorsque u et i sont liés par une équation différentielle linéaire a coefficients constants

$$a_n u^{(n)}(t) + \ldots + a_1 u^{(1)}(t) + a_0 u(t) = b_m i(t) + \ldots + b_1 i^{(1)}(t) + b_0 i(t)\,; \qquad (m \leq n)$$

Puissance instantanée

- Un dipôle électrocinétique comporte une borne d'entrée et une borne de sortie.
- On distingue deux types de dipôles : les récepteurs et les générateurs.
- La puissance instantanée est égale au produit de la tension aux bornes du dipôle et de l'intensité du courant qui le traverse :

$$p(t) = u(t)\, i(t)$$

p(t) : Puissance électrique instantanée en Watt (W)
u(t) : Tension aux bornes du dipôle en Volt (V)
i(t) : Intensité du courant parcourant le dipôle en Ampère (A)

Puissance instantanée

Comme en thermodynamique, la puissance reçue par le dipôle est comptée positivement, tandis que celle cédée au milieu extérieur est négative. Il est possible de classer les dipôles suivant le signe de la puissance :

	Dipôle récepteur	**Dipôle générateur**
puissance	Puissance reçue par le dipôle	Puissance cédée au reste du circuit
	Transforme de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie	Transforme une énergie non électrique en énergie électrique
Exemples	– moteur, lampe, diode – conducteur ohmique	– générateur basse fréquence G.B.F. – pile

Puissance instantanée

En convention récepteur,

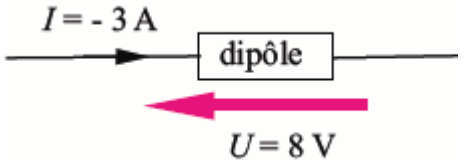
Signe de la puissance instantanée	Positive p(t) > 0	Négative p(t) < 0
Type de dipôle	Le dipôle est un récepteur	Le dipôle est un générateur

Exemple:

On considère le schéma suivant:

1) Examinons le comportement du dipôle utilisé.

2) Calculons la puissance électrique



Réponse:

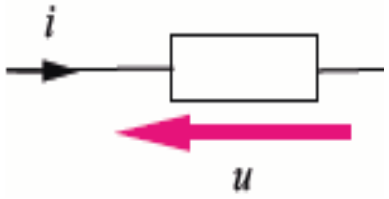
1) Le dipôle ci-contre est représenté en convention récepteur : la flèche de l'intensité et de la tension sont en sens contraire.

2) $P = UI = 8 \times (-3) = -24$ W

En convention récepteur, la puissance est négative.

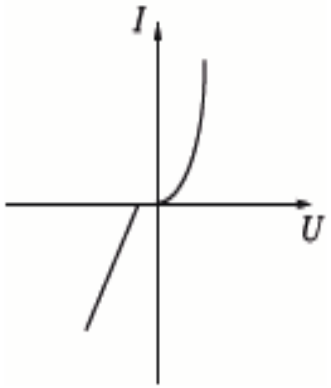
Le dipôle considéré est donc un générateur, il fournit de l'énergie au reste du circuit.

Caractéristique statique courant-tension



La caractéristique courant - tension d'un dipôle est la courbe, en régime continu, représentant les variations de l'intensité I parcourant le dipôle en fonction de la tension U à ses bornes.

soit $I = f(U)$.



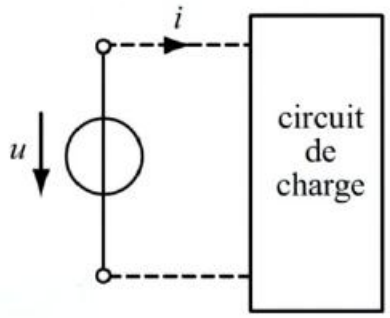
– Un dipôle est linéaire lorsqu'il existe une relation affine ou une équation différentielle linéaire à coefficients constants entre l'intensité et la tension.

– Un dipôle est passif lorsque sa caractéristique courant – tension passe par l'origine, alors qu'il est actif si sa caractéristique ne passe pas par l'origine.

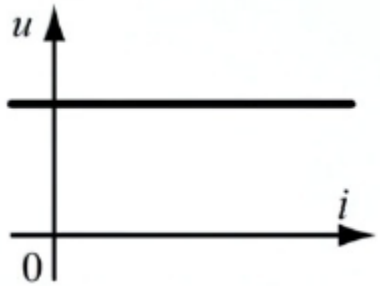
– Un dipôle est dit symétrique si sa caractéristique courant –tension est symétrique par rapport à O ; si ce n'est pas le cas, le dipôle est qualifié de non-symétrique.

Dipôles électrocinétiques

Source de tension



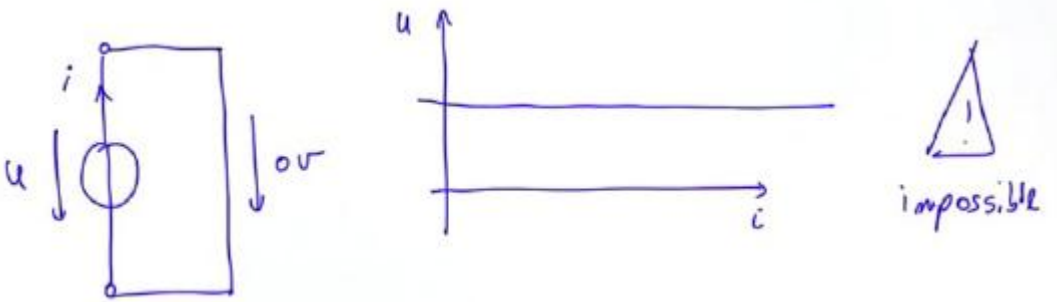
Source idéal



Lorsque le générateur est idéal, la tension délivrée est constante : $U = E$ quel que soit le courant débité

Cas particulier : le court-circuit

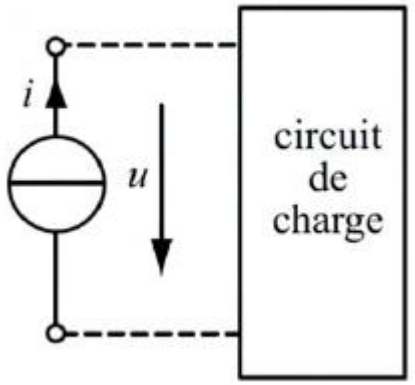
Remarque: Source idéal, n'existe pas dans la « nature »



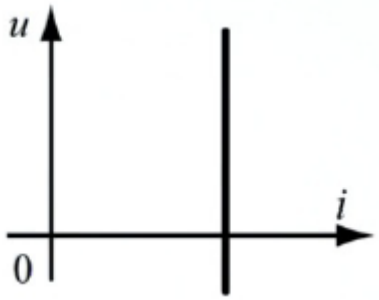
il faudra qu'on modélise autrement la source de tension réelle

Dipôles électrocinétiques

Source de courant

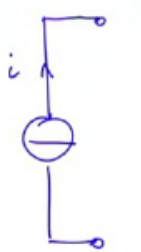


Source idéal



Lorsque le générateur est idéal, le courant débité est constante $I = I_0$ quel que soit ce que met aux bornes de cette source

Cas particulier :
le court-circuit



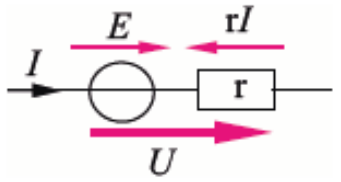
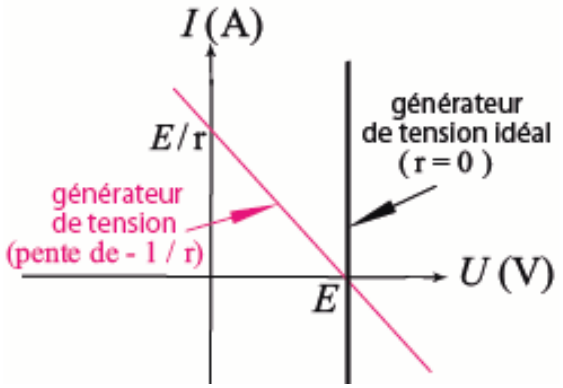
Remarque: Source idéal, n'existe pas dans la « nature »

Cas particulier : le court-circuit ouvert (on ne branche rien) : le courant devrait être nul, or, impossible

il faudra qu'on modélise autrement la source de courant réelle

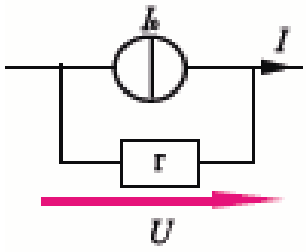
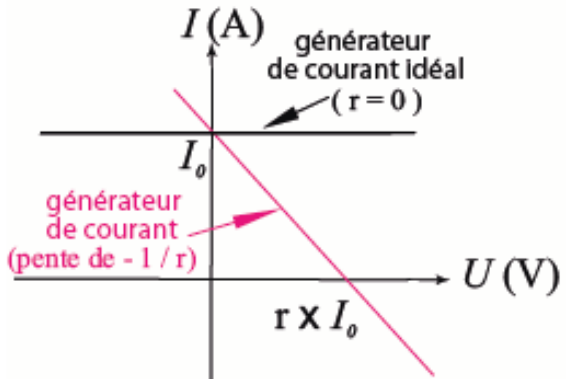
Dipôles électrocinétiques

Source de tension Réelle

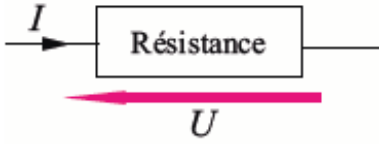
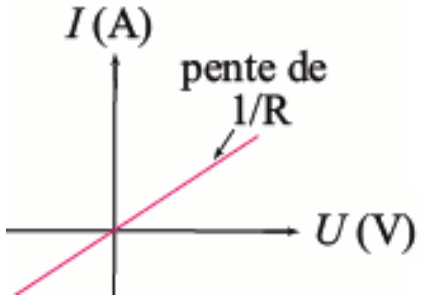
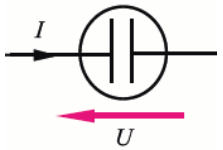
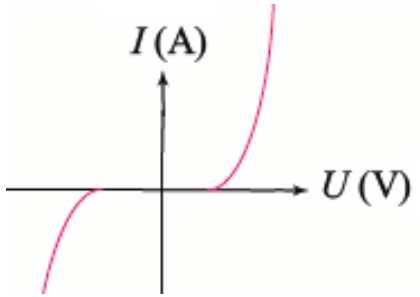
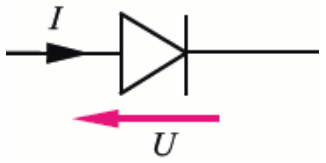
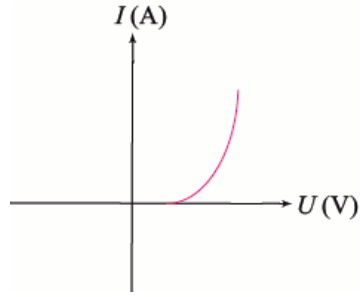
Dipôle	Définition	Caractéristique
Générateur de tension réel : 	Un générateur de tension réel délivre une tension $U = E - r\,I \Leftrightarrow I = \frac{E}{r} - \frac{U}{r}$ U : valeur de la tension de la source réelle en V E : valeur de la source idéale en V r : résistance de la source réelle en Ω I : intensité du courant en A	 - linéaire - actif - non-symétrique

Dipôles électrocinétiques

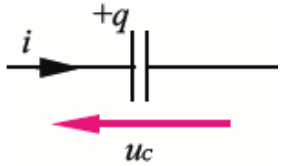
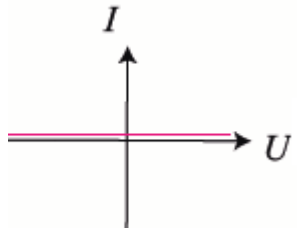
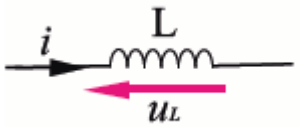
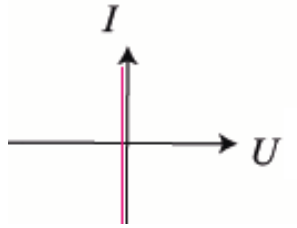
Source de courant Réel

Dipôle	Définition	Caractéristique
Générateur de courant réel : 	Un générateur de courant réel délivre un courant tel que $I = I_0 - \frac{U}{r}$ I : intensité du courant en A I_0 courant de court – circuit en A U : tension délivrée par le générateur en V r : résistance interne en Ω	 - linéaire - actif - non-symétrique

Dipôles électrocinétiques

Dipôle	Définition et Schéma	Caractéristique courant tension
Conducteur ohmique noté : R unité : Ohm (Ω) - linéaire - passif - symétrique	Le passage du courant entraîne un échauffement de ce dipôle appelé l'effet Joule 	Loi d'Ohm : $U = RI$ 
Electrolyseur - non- linéaire - passif - symétrique	Permet de réaliser des réactions chimiques en utilisant l'énergie électrique. 	
Diode à jonction - non-linéaire - passif - non symétrique	Ne laisse passer le courant que dans un sens. 	

Dipôles électrocinétiques

Dipôle	Définition et Schéma	Caractéristique courant tension
Condensateur noté : C unité : Farad (F) - linéaire - passif	Constitué de deux plaques métalliques séparées par un isolant.  $q = C\,u_c \quad et \;\; i = \frac{dq}{dt}$ $\Rightarrow u = \frac{1}{C}\int i\,dt \;\; ou \; i = C\frac{du_c}{dt}$	$I = 0\,; \;\; \forall\, U = cte$ Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert 
Inductance notée : L unité : Henry (H) - linéaire - passif	Constitué d'un enroulement de fil en forme de spires.  $u_L = L\frac{di}{dt}$ L : Inductance (H)	$U = 0\,; \;\; \forall\, I = cte$ L'inductance se comporte Comme un fil. 

Puissance consommée

➢ la puissance instantanée consommée par un condensateur est

$$p(t) = u_C(t)\, i(t) = C\, u_C(t) \frac{du_C(t)}{dt}$$

En utilisant la relation mathématique suivante:

$$\frac{d(f^2(t))}{dt} = 2f \frac{df(t)}{dt}$$

on obtient la relation

$$p(t) = \frac{C}{2} \frac{d({u_C}^2(t))}{dt}$$

- L'énergie échangée entre deux instants t_i et t_f vaut :

$$W = \int_{t_i}^{t_f} p(t)dt = \frac{C}{2}\left({u_C}^2(t_f) - {u_C}^2(t_i)\right)$$

Puissance consommée

➢ la puissance instantanée consommée par une inductance est:

$$p(t) = u_L(t)\, i(t) = L\, i(t) \frac{di(t)}{dt}$$

En utilisant la relation mathématique suivante:

$$\frac{d(f^2(t))}{dt} = 2f \frac{df(t)}{dt}$$

on obtient la relation

$$p(t) = \frac{L}{2} \frac{d(i^2(t))}{dt}$$

- L'énergie échangée entre deux instants t_i et t_f vaut :

$$W = \int_{t_i}^{t_f} p(t)dt = \frac{L}{2}\left(i^2(t_f) - i^2(t_i)\right)$$

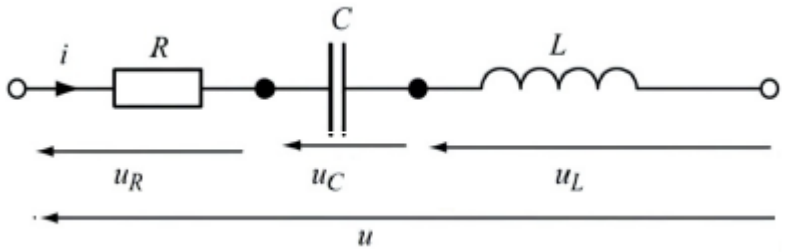
Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Combinaison simple d'éléments linéaire

Définition : dipôles équivalents

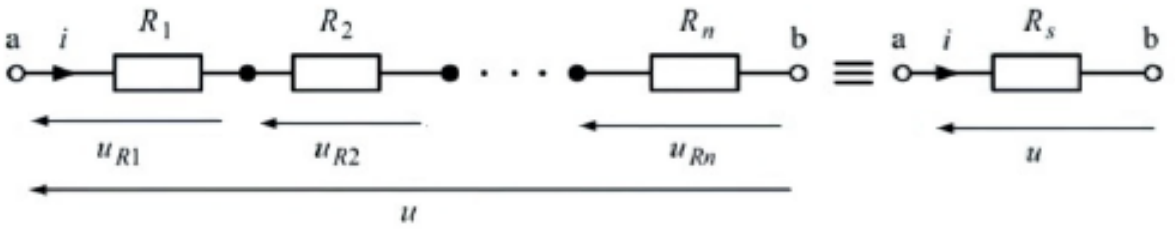
Deux dipôles qui ont en tout temps le même courant lorsqu'ils sont soumis à la même tension :

Eléments en séries



$$i = i_R = i_C = i_L \quad et \quad u = u_R + u_C + u_L$$

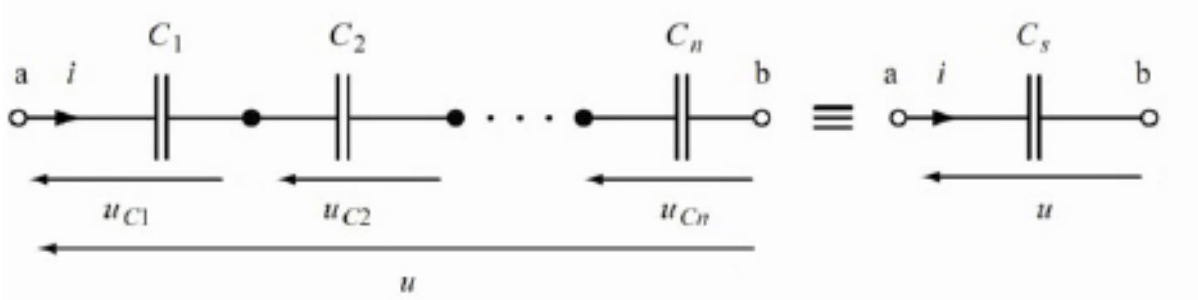
Mise en série de résistances

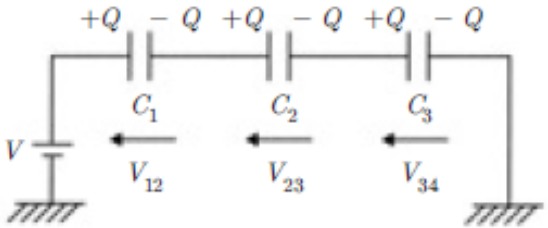


$$u = \sum_{k=1}^{n} u_{Rk} = \sum_{k=1}^{n} R_k\, i = R_s\, i \quad \Rightarrow \quad R_s = \sum_{k=1}^{n} R_k$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Mise en série de capacités





La charge Q se conserve

$$u_{Ck} = \frac{1}{C_k}\int_0^t i(t')dt' = \frac{Q}{C_k}$$

$$u = \sum_{k=1}^{n} u_{Ck} = \frac{Q}{C_S}$$

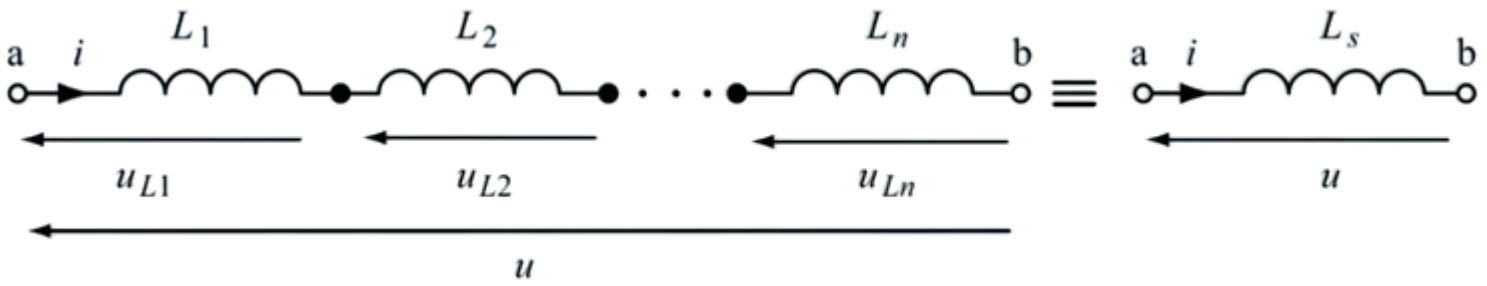
$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}\right)\int_0^t i(t')dt'$$

$$= \frac{1}{C_S}\int_0^t i(t')dt'$$

$$\frac{1}{C_S} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{C_k} \Rightarrow \; C_S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/C_k}$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

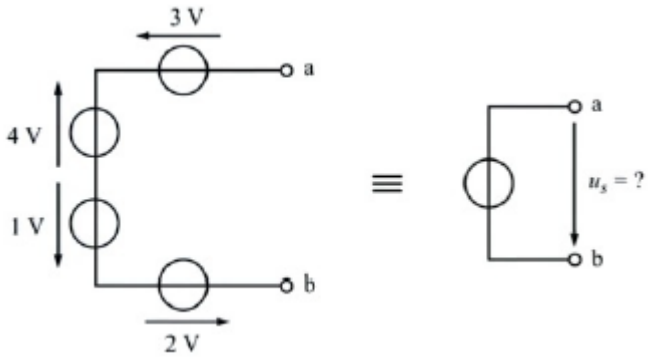
Mise en série de l'inductance



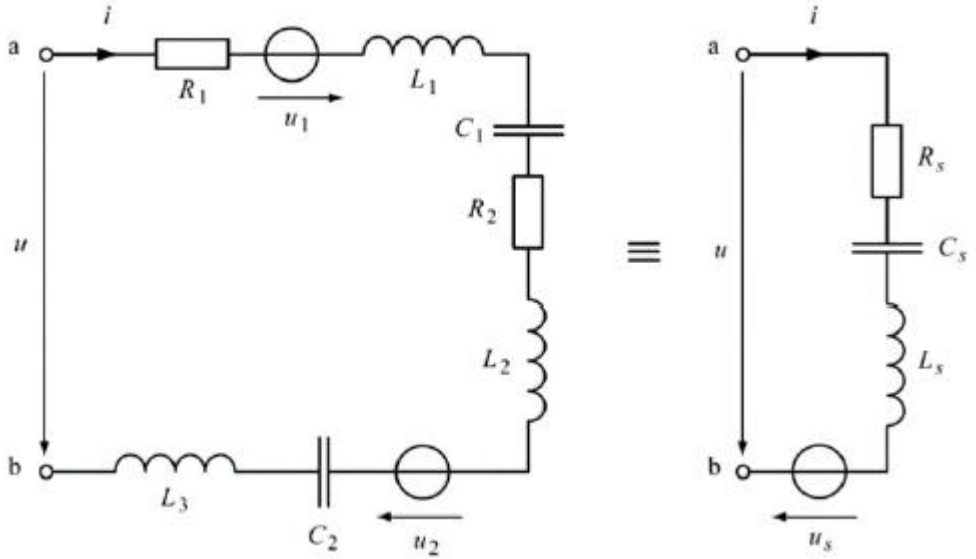
$$u = \sum_{k=1}^{n} u_{Lk} = \sum_{k=1}^{n} L_k \frac{di}{dt} = L_s \frac{di}{dt} \Rightarrow \qquad L_s = \sum_{k=1}^{n} L_k$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Mise en série de sources de tension



Mise en série de plusieurs éléments de chaque type



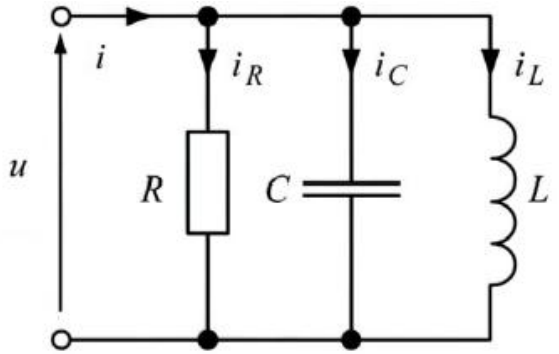
Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Eléments en parallèle

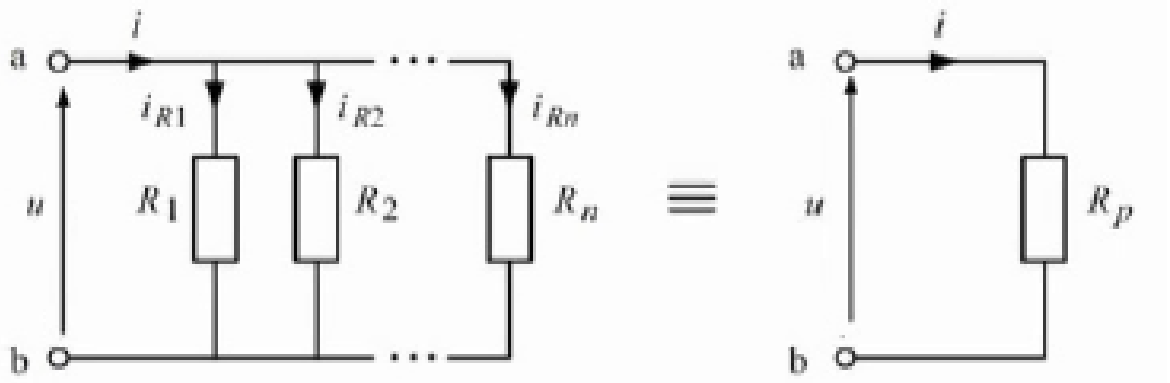
Propriété fondamentale

$$i = i_R + i_C + i_L$$

$$u = u_R = u_C = u_L$$



Mise en parallèle de résistance



$$i = i_{R_1} + i_{R_2} + \cdots + i_{R_n} = i$$

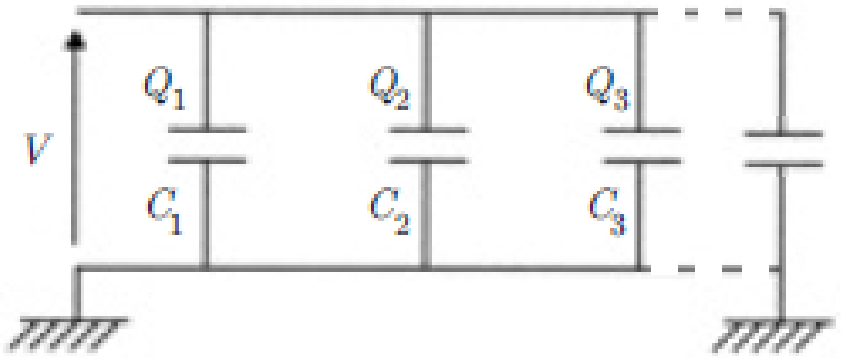
$$i = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n} = \frac{u}{R_p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$$

$$R_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/R_k} \quad ou \quad G_p = \sum_{k=1}^{n} G_k$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Mise en parallèle de capacités



$$i = i_{L_1} + i_{L_2} + \cdots + i_{L_n}$$

$$\Rightarrow Q = Q_{C1} + Q_{C2} + \cdots + Q_{Cn}$$

$$Q_k = C_k u_{Ck} = C_k u$$

$$Q = \sum_{k=1}^{n} Q_{Ck}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k u = C_S u$$

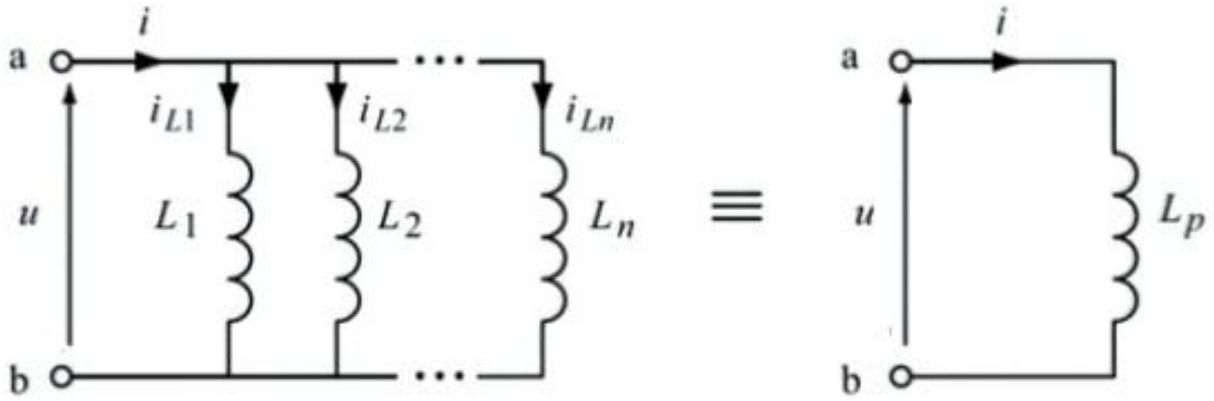
$$C_S = \sum_{k=1}^{n} C_k$$

Remarques

- La différence de potentiel se conserve
- Les charges se répartissent différemment

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Mise en parallèle d'inductances



$$i = i_{L_1} + i_{L_2} + \cdots + i_{L_n} = i$$

$$i_{L_k}(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u(t')dt'$$

$$i(t) = \sum_{k=1}^{n} i_{L_k}(t)$$

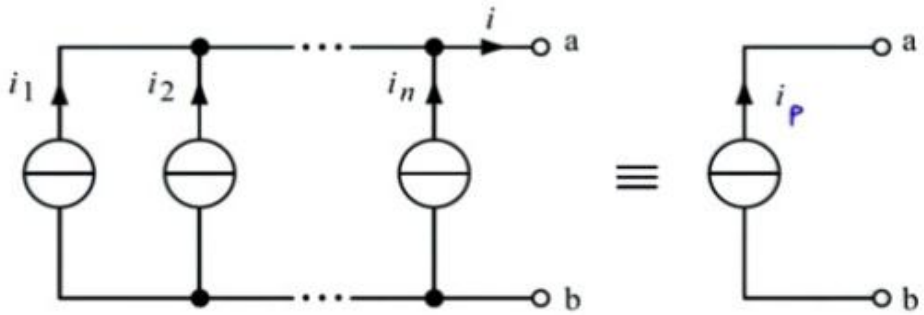
$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}\right)\int_0^t u(t')dt'$$

$$= \frac{1}{L_P}\int_0^t u(t')dt'$$

$$\frac{1}{L_P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{L_k} \Rightarrow L_p = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/L_k}$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Mise en parallèle de sources de courant

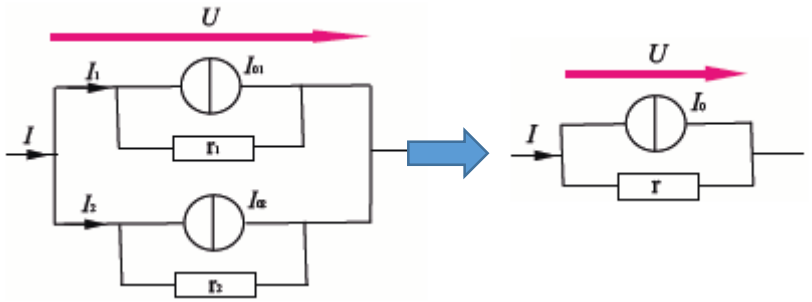


$$i = i_p = \sum_{k=1}^{n} i_k$$

Exemple

Considérons deux générateurs de courant montés en parallèle.

Cherchons le générateur de courant équivalent.



D'après la loi des nœuds : $I = I_1 + I_2$

En remplaçant par le modèle de Norton, on obtient :

$$I = \left(I_{01} - \frac{U}{r_1}\right) + \left(I_{02} - \frac{U}{r_2}\right) \Rightarrow I = (I_{01} + I_{02}) - U\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Le générateur de Norton correspondant est donc tel que : $\begin{cases} I_0 = I_{01} + I_{02} \\ \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \end{cases}$

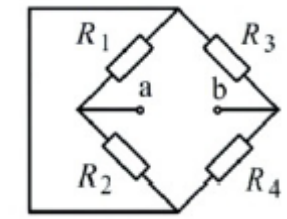
Analyse et résolution d'un circuit linéaire

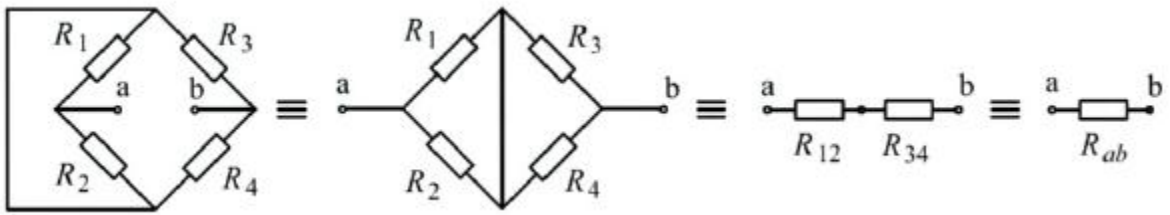
Circuits combinés série-parallèle

Exemple avec des résistances

Soit $R_1 = 2K\Omega$; $R_2 = 8K\Omega$; $R_3 = 5K\Omega$; $R_4 = 200\Omega$

Donner l'expression de la résistance équivalent R_{ab} et calculer sa valeur numérique:





$$R_{12} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad \Rightarrow \quad R_{12} = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{34} = \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad \Rightarrow \quad R_{34} = \frac{R_3\, R_4}{R_3 + R_4}$$

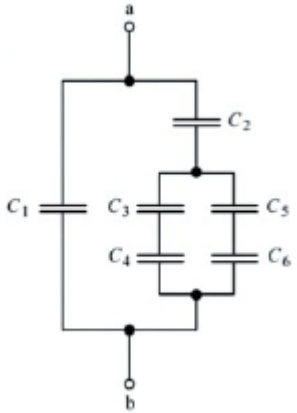
$$R_{ab} = R_{12} + R_{34}$$

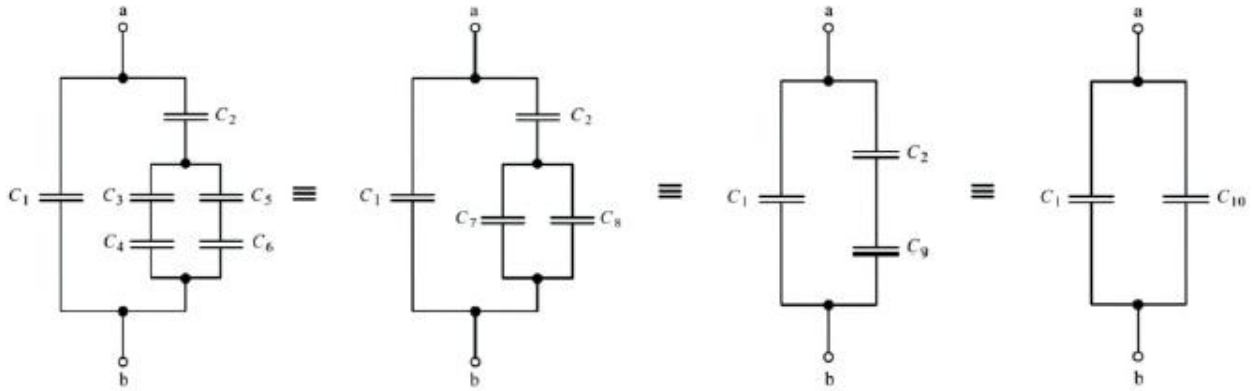
Application numérique

$$R_{ab} = 1{,}792K\Omega$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Exemple avec des capacités





$$C_7 = \frac{1}{\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}} \quad \Rightarrow \quad C_7 = \frac{C_3\, C_4}{C_3 + C_4}$$

$$C_8 = \frac{1}{\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_6}} \quad \Rightarrow \quad C_8 = \frac{C_5\, C_6}{C_5 + C_6}$$

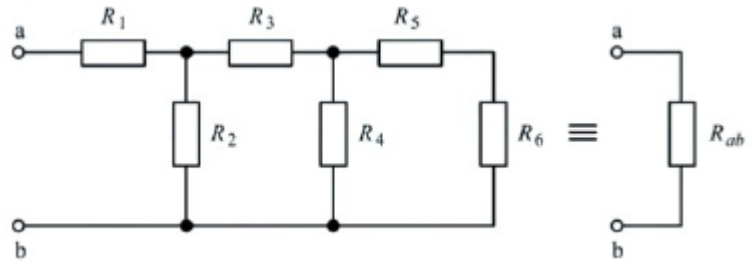
$$C_9 = C_7 + C_8$$

$$C_{10} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_9}} \quad \Rightarrow \quad C_{10} = \frac{C_2\, C_9}{C_2 + C_9}$$

$$C_{ab} = C_1 + C_{10}$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Exemple de circuit en échelle

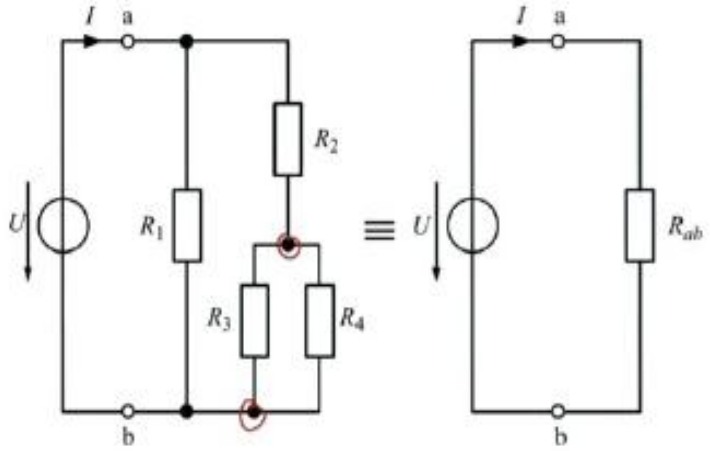


$$R_{ab} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + R_6}}}}$$

Exemple de circuit complet

Soit $U = 73.45V;\ R_1 = 22\Omega;\ R_2 = 36\Omega;$

$$R_3 = 18\Omega;\ R_4 = 15\Omega$$



$$R_{34} = \frac{R_3\, R_4}{R_3 + R_4}$$

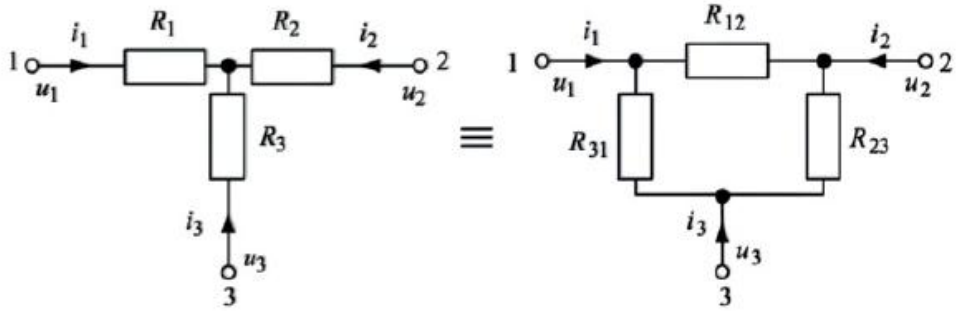
$$R_{234} = R_2 + R_{34} = R_2 + \frac{R_3\, R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{ab} = \frac{R_1\, R_{234}}{R_1 + R_{234}} \qquad AN \qquad R_{ab} = 14.69\Omega$$

$$U = R_{ab}\, I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{R_{ab}} \qquad AN \quad I = 5A$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

Transformation $\Pi - T$



$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}\,(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}\,(R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}\,(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$\Rightarrow \quad R_1 = \frac{R_{12}\,R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}\,(E1 + E3 - E2)$$

$$R_2 = \frac{R_{12}\,R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}\,(E1 + E2 - E3)$$

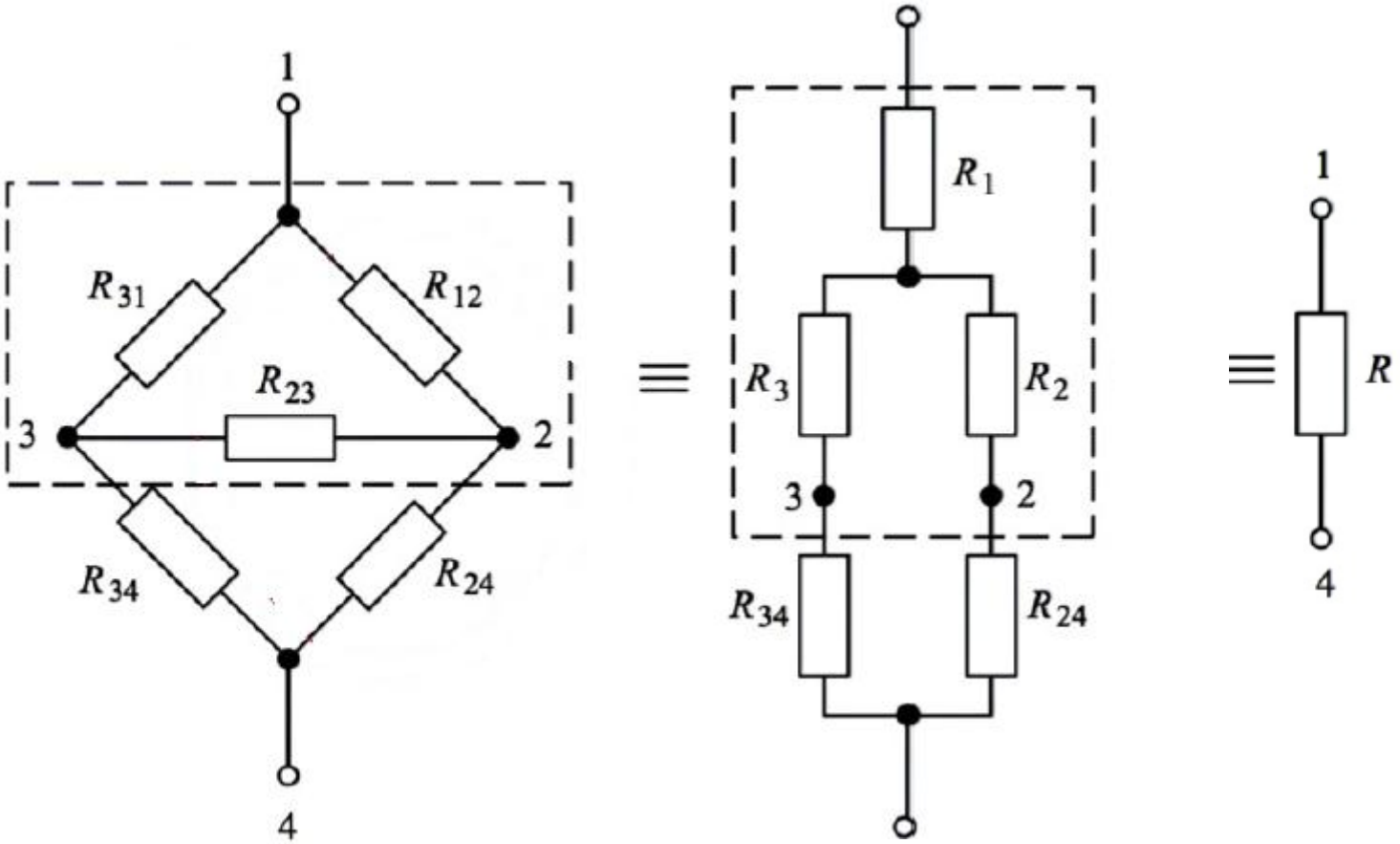
$$R_3 = \frac{R_{23}\,R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}\,(E2 + E3 - E1)$$

Equivalence de tripole « en T » et « en Π » opération inverse

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3};\;\; R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2\,R_3}{R_1};\; R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3\,R_1}{R_2}$$

Analyse et résolution d'un circuit linéaire

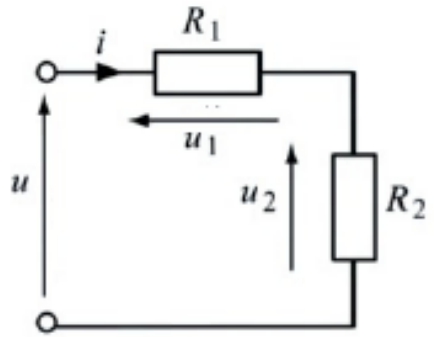
Exemple



$$R = R_1 + \frac{(R_2 + R_{24})\,(R_3 + R_{34})}{R_2 + R_{23} + R_3 + R_{34}}$$

Circuits Diviseurs de tension et de courant

Diviseur de tension résistif

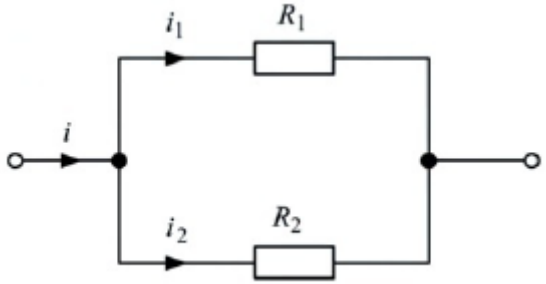


$$u = u_1 + u_2 = R_1\, i + R_2\, i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{u}{R_1 + R_2}$$

$$u_2 = R_2\, i \quad = u\, \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$u_1 = R_1\, i \quad = u\, \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Diviseurs de courant



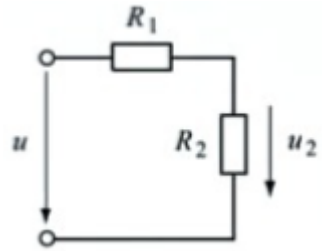
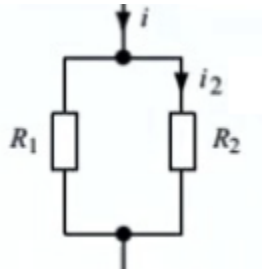
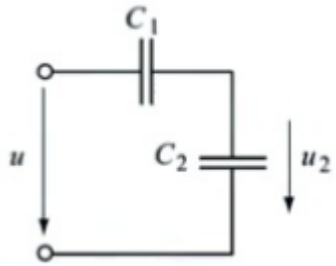
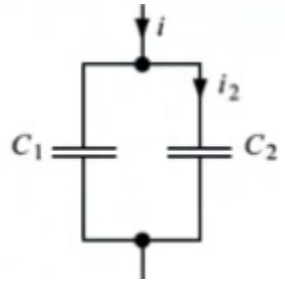
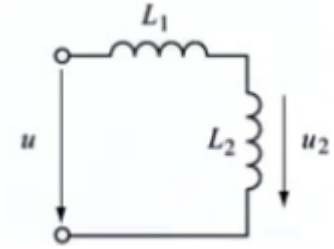
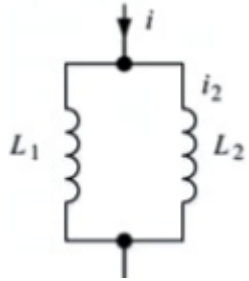
$$i = i_1 + i_2$$

$$u = u_1 = u_2 = R_1\, i_1 = R_2\, i_2$$

$$i_1 = i\, \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad et \quad i_2 = i\, \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

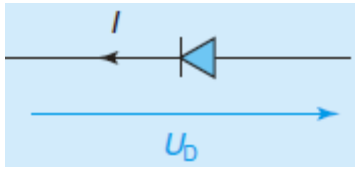
Circuits Diviseurs de tension et de courant

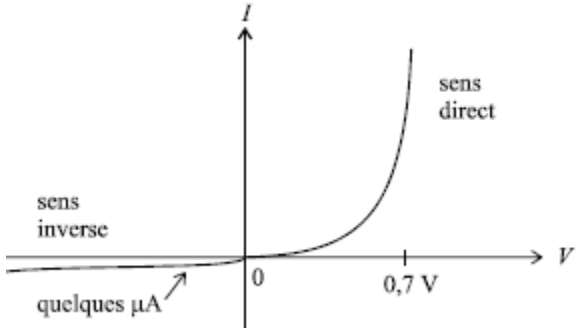
Conclusion

Diviseur de tension		Diviseur de courant	
	$u_2 = u \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$		$i_2 = i \dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$
	$u_2 = u \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}$		$i_2 = i \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}$
	$u_2 = u \dfrac{L_2}{L_1 + L_2}$		$i_2 = i \dfrac{L_1}{L_1 + L_2}$

Caractéristiques électriques des diodes

La caractéristique $I = f(V)$ d'une diode courante.





En sens direct, on admet que :

$$I = I_s \exp\left(\frac{Ve}{kT}\right) = I_s \exp\left(\frac{V}{V_0}\right)$$

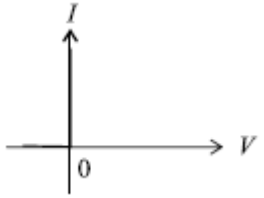
Avec $V_0 = \frac{kT}{e}$=25mV à température ambiante,

I_s étant de l'ordre du mA, e=$1.610^{-19}C, k = 1.3810^{-23}JK^{-1}$

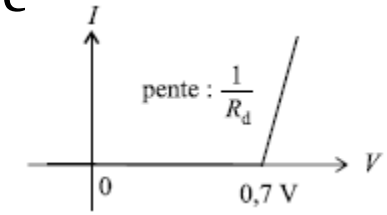
- diode polarisée en sens direct : $V = 0{,}7\ V, \forall I$; la diode est dite passante.
- diode polarisée en sens inverse : $I = 0, \forall V$; la diode est dite bloquée.

Ce modèle de diode dite parfaite est représenté sur la figure

a) Diode parfait



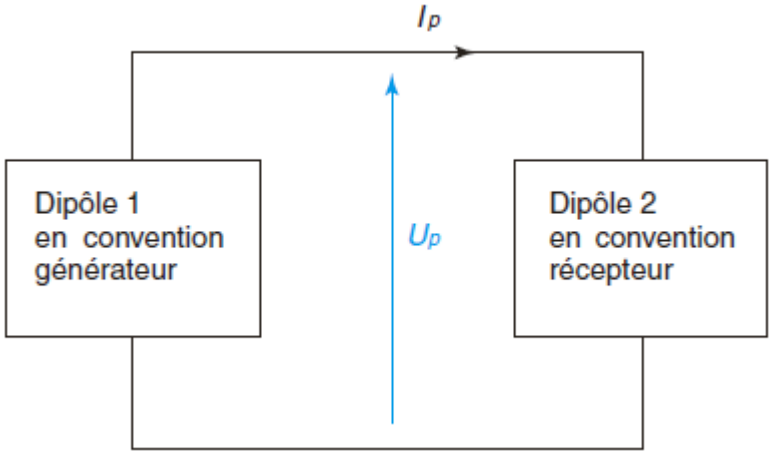
b) Diode idéale

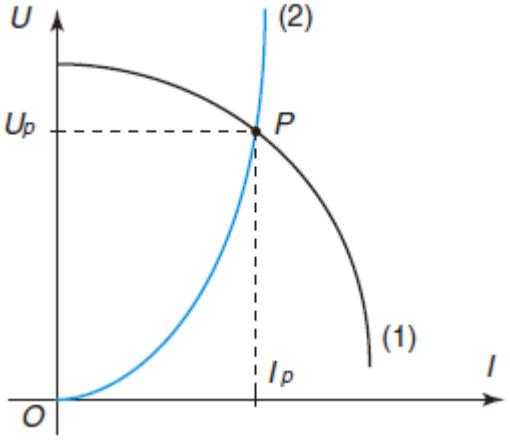


c) Modèle dynamique

Point de fonctionnement d'un circuit

Le point de fonctionnement d'un circuit comportant deux dipôles est le point d'intersection des caractéristiques de ces deux dipôles.





En noir, caractéristique du dipôle (1)
En couleur, caractéristique du dipôle (2)

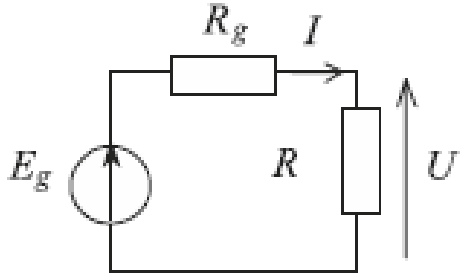
Le point P est appelé *point de repos* ou *point de fonctionnement* du circuit.

Point de fonctionnement

Mise en équation-caractérisation

Par Kirchhoff :

$$\sum u = 0$$

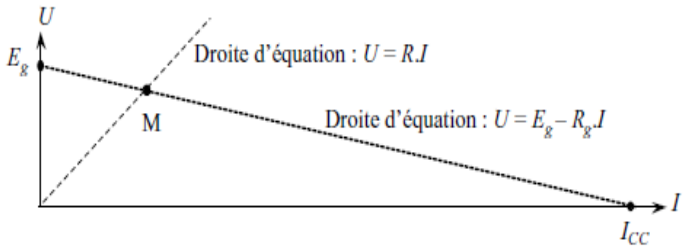


$$E_{\mathrm{g}} - U_{R_g} = U$$

$$E_{\mathrm{g}} - R_g\, I = RI$$

$$E_{\mathrm{g}} = I\left(R_g + R\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{E_{\mathrm{g}}}{R_g + R} \quad et \quad \mathrm{U} = E_{\mathrm{g}} \frac{R}{R_g + R}$$



Si $R = \infty$ (circuit ouvert) $\Rightarrow U = E_{\mathrm{g}}$ « à vide »

$(I = 0)$

Si $R = 0$ (circuit fermé) $\Rightarrow \quad U = 0$ « en court-circuit »

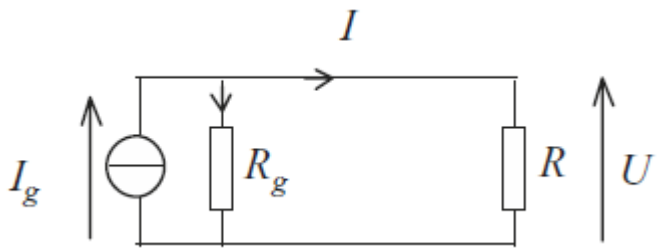
$$I = I_{cc} = \frac{E_{\mathrm{g}}}{R_g}$$

Source de courant réelle

Nœud

$$I_g = I_p + I$$

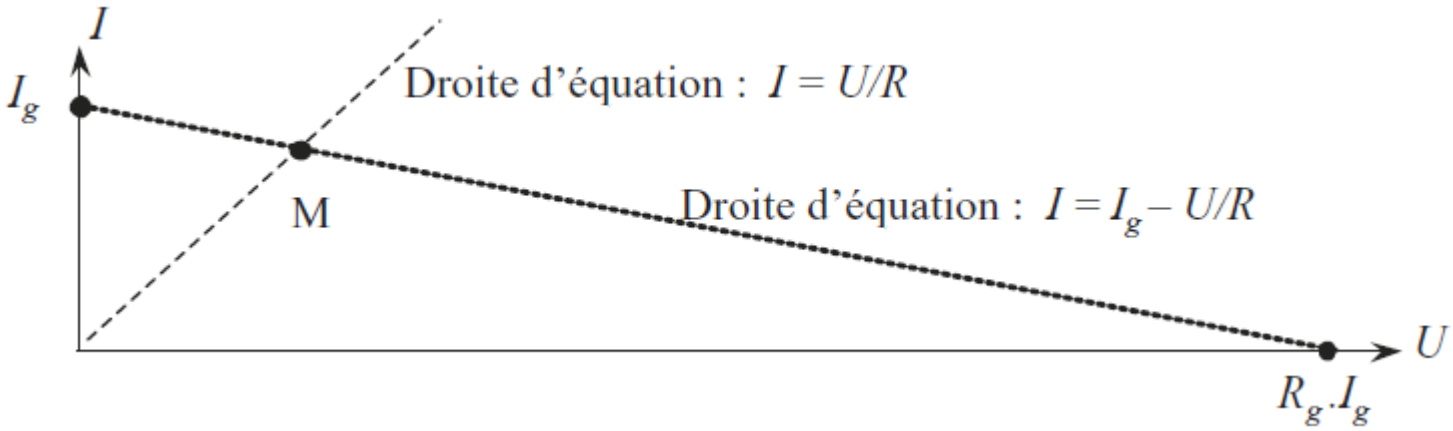
$$R_{eq} = \frac{R_g\, R}{R_g + R} \quad et \quad U = R_{eq} I_g ; \mathrm{I} = \frac{U}{R}$$



Si $R = \infty$ (circuit ouvert) $\Rightarrow$ $I = 0$ et $U = R_g\, I_g$

« tension maximale» ‘circuit-ouvert’

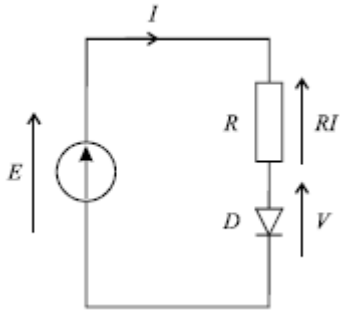
Si $R = 0$ (circuit fermé) $\Rightarrow$ $I = i_{cc}$ « courant maximale » ‘en court-circuit’



Polarisation de la diode

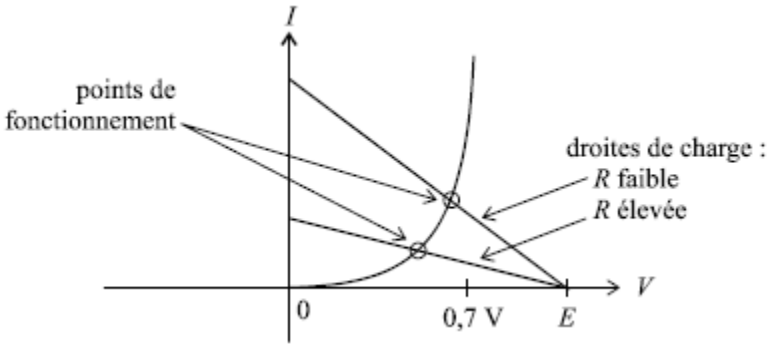
On polarise une diode en sens direct en l'incluant dans un circuit de sorte qu'elle soit parcourue par un courant I. Sur le schéma de la figure, un générateur parfait de tension E continue alimente un dipôle formé d'une résistance R et d'une diode en série.

On a évidemment: $I = I_s \exp\left(\frac{V}{V_0}\right)\ etE = RI + V$



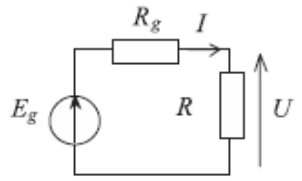
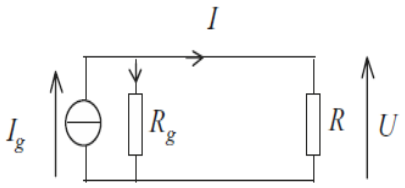
Soit encore:

$$\begin{cases} I = I_s \exp\left(\frac{V}{V_0}\right) \rightarrow \text{ caractéristique de la diode} \\ I = \frac{E - V}{R} \rightarrow \text{la droite de charge} \end{cases}$$

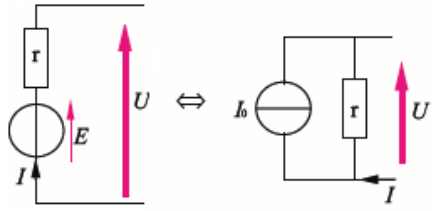


Le point d'intersection de ces deux courbes donne le point de fonctionnement du circuit
On voit bien que pour diverses valeurs de R, la tension V varie peu.

Passage du modèle de Thévenin à celui de Norton

Source réelle	Courant de court-circuit ($R = 0$)	Tension à vide (R= ∞)
	$I_0 = \frac{E_g}{R_g}$	$U_\infty = E_g$
	$I_0 = I_g$	$U_\infty = R_g I_g$

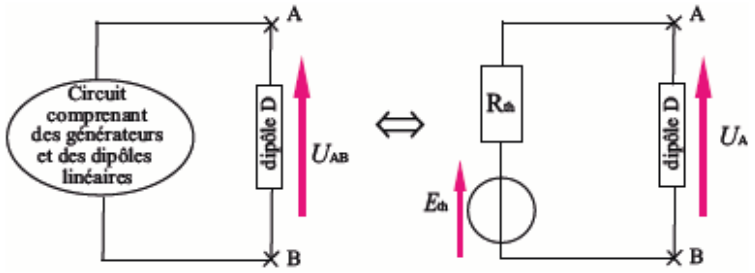
$$\frac{E_g}{R_g} = I_g \quad et \quad E_g = R_g I_g \Rightarrow \quad R_{GT} = R_{gN}$$

Nom	Schéma	Relation
Passage du modèle de Thévenin à celui de Norton		Les deux représentations sont équivalentes avec $E = rI_0$

Réseaux linéaires en régime continu

Théorème de Thévenin

Considérons un circuit linéaire qui alimente par les bornes A et B, un dipôle D. Le théorème de Thévenin permet de remplacer ce circuit linéaire par un générateur de tension idéal de f.é.m. E_{th} en série avec une résistance R_{th}.



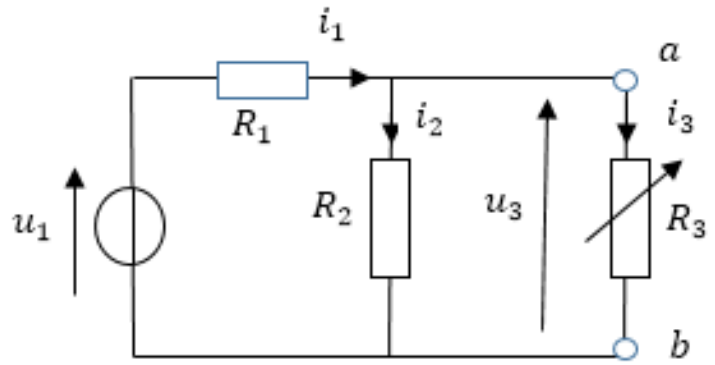
$$E_{th} = u_{ab}\Big|_{i=0}$$

$$R_{th} = R_{ab}\Big|_{\substack{u_j=0 \\ i_j=0}}$$

– La f.é.m. E_{th} du générateur de Thévenin est égale à la différence de potentiel U_{AB} entre A et B lorsque le dipôle D est débranché.

– La résistance de Thévenin R_{th} est égale à la résistance mesurée entre A et B lorsque le dipôle D est débranché et que les générateurs sont éteints et remplacés par leurs résistances internes.

Exemple:
Déterminer les modèles de Thévenin vus par la charge (circuit à gauche des points A et B).



Tension « à vide »

$$i_1 = i_2; \quad i_2 = \frac{u_1}{R_1 + R_2} \; ; \quad u_3 = R_2 i_2 = u_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} = u_{Th}$$

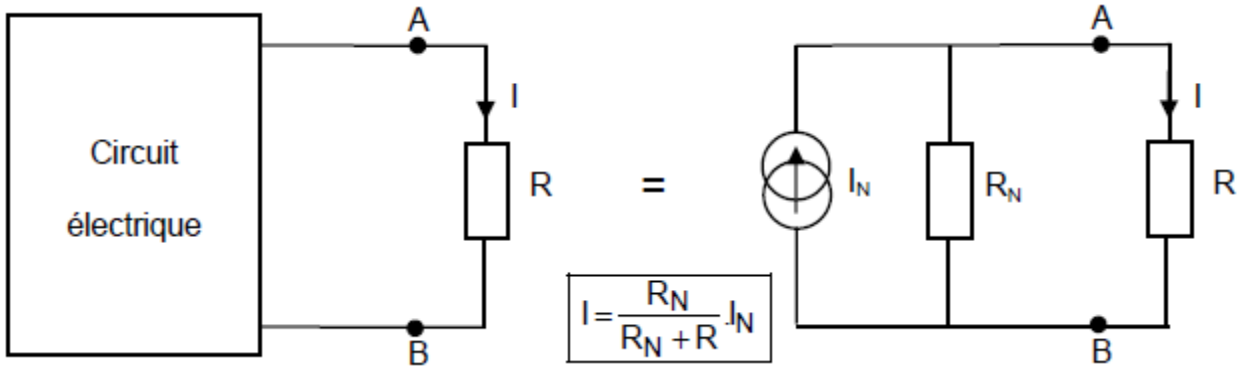
Résistance de générateur de Thévenin

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Réseaux linéaires en régime continu

Méthode de Norton

Le théorème de Norton va nous permettre de réduire un circuit complexe en générateur de courant réel. Ce générateur possède une source de courant (I^N) en parallèle avec une résistance (R^N),

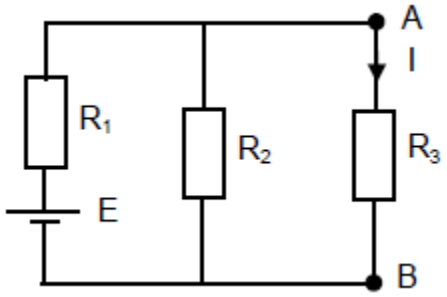


Principe

- Le courant de Norton I^N est obtenu par calcul ou par une mesure après avoir court-circuité les bornes A et B,
- La résistance interne R^N s'obtient de la même façon que celle du théorème de Thévenin ($R^N = R^{Th}$),

Exemple

On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :



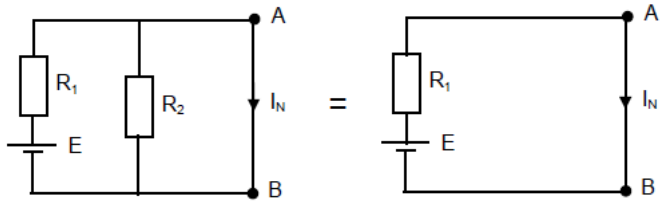
On donne : E = 8 V ; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 12\ \Omega$; $R_3 = 9\ \Omega$

Calculer le courant I qui traverse la résistance R_3 en appliquant le théorème de Norton.

Solution :

1) Calcul de I_N

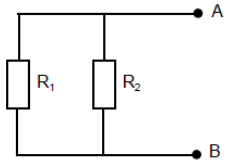
On débranche la résistance R_3 et on court-circuite les bornes A et B, la configuration sera donc :



$$I_N = \frac{E}{R_1} = \frac{8}{4} = 2A$$

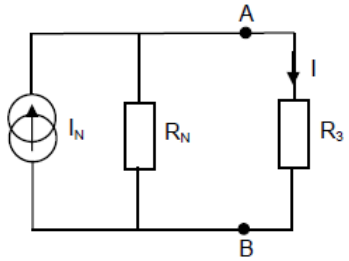
2) Calcul de $R_N = R_{ab}$

R_3 étant toujours débranchée, on court-circuite E, la configuration sera donc :



$$R_N = R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4 * 12}{4 + 12} = 3\Omega$$

3) Calcul de I



$$I = I_N \frac{R_N}{R_N + R_3} = 2\frac{3}{3+9} = 0.5A$$

Réseaux linéaires en régime continu

Théorème de superposition

Enoncé :

La réponse du système à une somme d'excitations est égale à la somme des réponses dues à chaque excitation prise séparément.

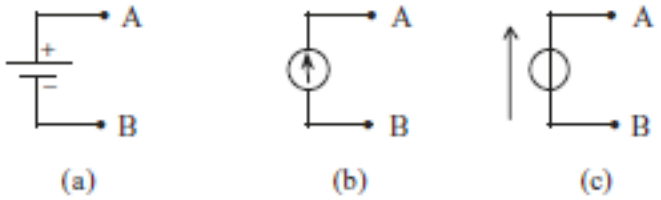
Buts et avantages

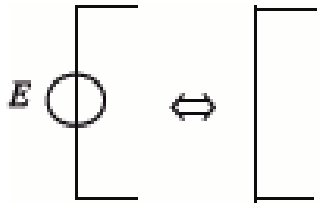
- Eviter une méthode d'analyse globale souvent lourde
- Succession de calculs partiels
- A chaque étape, une seule source est prise en compte
- Les autres sont annulées
- Le résultat total est la somme algébrique des résultats partiels

Réseaux linéaires en régime continu

Que signifie « annuler une source » ?

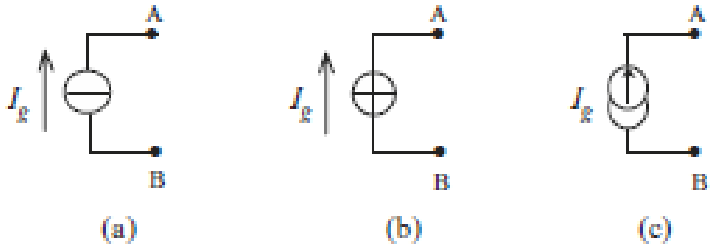
Éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil :

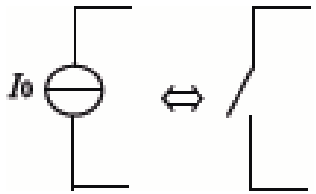




Différents symboles pour une source de tension.

Éteindre une source de courant revient à la remplacer par un circuit ouvert :

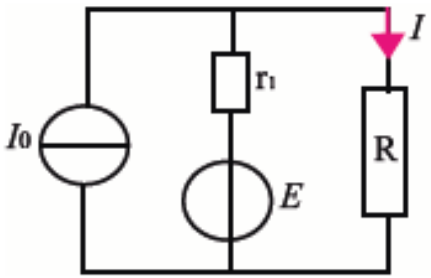




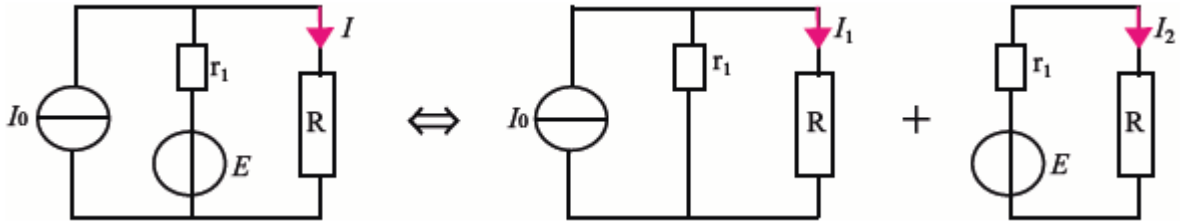
Nouveaux symboles (a) et (b) et ancien symbole (c) d'une source de courant

Théorème de superposition

Considérons le circuit ci-contre, comprenant un générateur de courant et un générateur de tension. Utilisons le théorème de superposition afin de déterminer le courant *I* circulant dans la résistance R.



Éteignons les sources tour à tour. D'après le théorème de superposition, avec I_1 et I_2 définis comme sur les schémas ci- dessous.



– Pour déterminer I_1, on utilise le diviseur de courant $I_1 = \frac{R}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{R}} I_0 = \frac{r_1}{r_1+R} I_0$

– La tension aux bornes du générateur est égale à la tension aux bornes de la résistance :

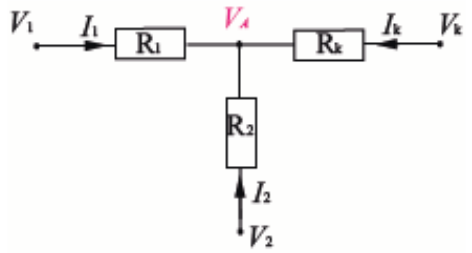
$$E - r_1 I_2 = R I_2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{E}{r_1 + R}$$

Le courant circulant dans la résistance R vaut donc, $I = I_2 + I_2 = \frac{r_1}{r_1+R} I_0 + \frac{E}{r_1+R}$

Réseaux linéaires en régime continu

Théorème de Millman

Ce théorème permet de calculer le potentiel en un point d'un circuit. Considérons le nœud A du circuit ci-dessous, de potentiel V_A.



Écrivons la loi des nœuds et la loi des mailles :

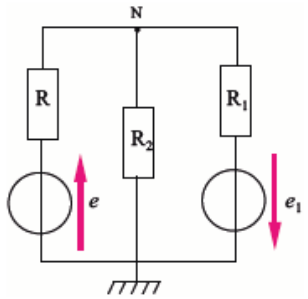
$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_k = 0 \\ V_1 - V_A = R_1 I_1 \\ V_2 - V_A = R_2 I_2 \\ V_k - V_A = R_k I_k \end{cases}$$

En éliminant les courants, on peut déduire le potentiel au point A

$$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{\sum\left(\frac{V_n}{R_n}\right)}{\sum\left(\frac{1}{R_n}\right)}$$

Théorème de Millman

Exemple 1: À l'aide du théorème de Millman, écrivons l'expression du potentiel au point N.

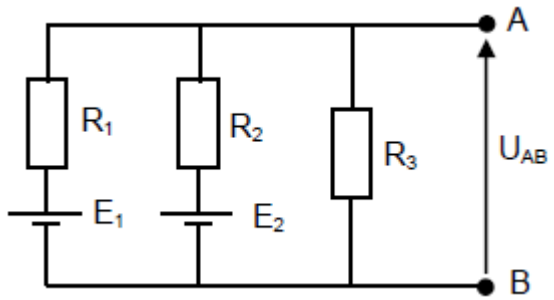


$$V_N = \frac{\sum\left(\frac{V_n}{R_n}\right)}{\sum\left(\frac{1}{R_n}\right)} = \frac{\frac{e}{R} - \frac{e_1}{R_1} + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Exemple 2: On considère le circuit électrique donné par la figure suivante :

On donne : $E_1 = 5$ V; $E_2 = 20$ V; $R_1 = 5\ \Omega$; $R_2 = R_3 = 10\ \Omega$

Calculer U_{AB}



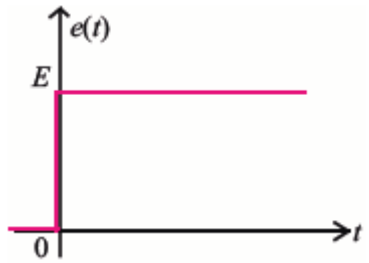
$$U_{AB} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 7.5V$$

Réseaux électrocinétiques: Régimes variables

Circuit *R*, *L*

La loi des mailles s'écrit:

$$u_L + u_R - E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L\frac{di}{dt} + Ri - E = 0$$



Soit, en posant $\tau = L/R$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

Une solution particulière correspondant au régime continu :

$$i_p = \frac{E}{R}$$

La solution de l'équation homogène

$$i_h = A\, e^{\frac{-t}{\tau}}$$

La solution générale est donc :

$$i = i_h + i_p = \frac{E}{R} + A\, e^{\frac{-t}{\tau}}$$

La continuité du courant : $i\,(t = 0) = 0$. Par conséquent: $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$

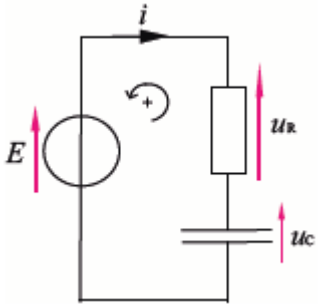
Circuit *R*, *C*

Courant de charge du condensateur

Avec les conventions d'orientation de la figure on a : $i = \frac{dq}{dt}$: $u_c = \frac{q}{C}$

La loi des mailles s'écrit:

$$u_c + u_R - E = 0 \quad \Rightarrow u_c + Ri - E = 0$$



Soit, en posant $\tau = 1/RC$

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{RC}$$

Une solution particulière de cette équation correspondant au régime continu :

$$u_p = E$$

La solution de l'équation homogène

$$u_h = A\, e^{\frac{-t}{\tau}}$$

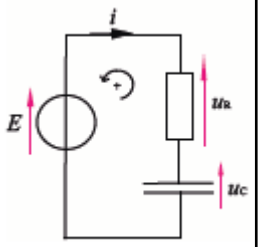
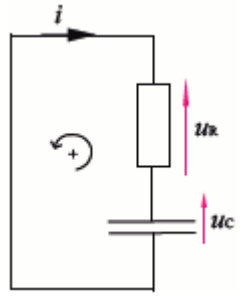
Soit, compte tenu que $u_c(0^+) = u_c(0^-) = u_c(0) = 0$, La solution générale est donc :

$$u_c = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{R} e^{\frac{-t}{\tau}} \quad avec \quad i(0^+) = \frac{E}{R}\ et \quad i(0^-) = 0$$

Régimes libres du premier ordre

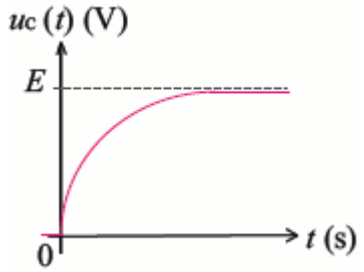
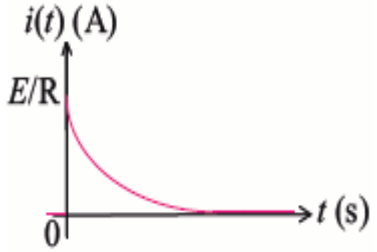
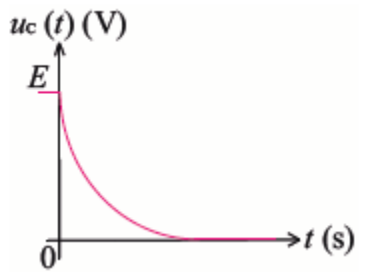
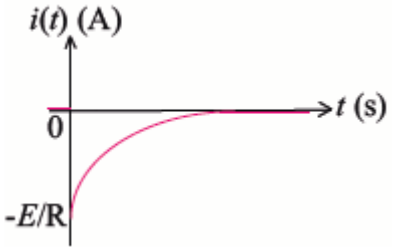
Circuit RC

Les principaux résultats pour un circuit RC sont regroupés dans ce tableau, aussi bien concernant la charge que la décharge du condensateur.

	Charge du condensateur		Décharge du condensateur	
Schéma et mise en équation		$u_c + u_R - E = 0$ $\Leftrightarrow$ $RC\frac{du_c}{dt} + u_c = E$		$u_c + u_R = 0$ $\Leftrightarrow$ $RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$
Équation différentielle	$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{RC} = \frac{E}{RC}$ Équation du 1er ordre à coefficients constants avec second membre non nul		$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{RC} = 0$ Équation du 1er ordre à coefficients constants avec second membre nul	

Régimes libres du premier ordre

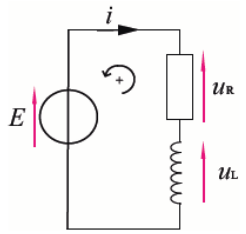
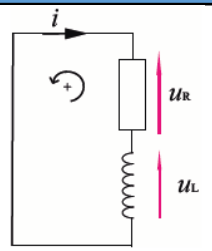
Circuit RC

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Charge du condensateur</th><th colspan="2">Décharge du condensateur</th></tr>
<tr><td>Condition initiale</td><td colspan="2">$u_c(t=0)=0$</td><td colspan="2">$u_c(t=0)=E$</td></tr>
<tr><td>Solution de l'équation différentielle</td><td colspan="2">$u_c = E\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$</td><td colspan="2">$u_c = Ee^{\frac{-t}{\tau}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Allure de la tension aux bornes du condensateur</td><td>$u_c(t)$</td><td>$i(t) = \frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$</td><td>$u_c(t)$</td><td>$i(t) = -\frac{E}{R}e^{\frac{-t}{\tau}}$</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td colspan="4">La tension aux bornes du condensateur est continue tandis que l'intensité le traversant est discontinue</td></tr>
</table>

Régimes libres du premier ordre

Circuit RL

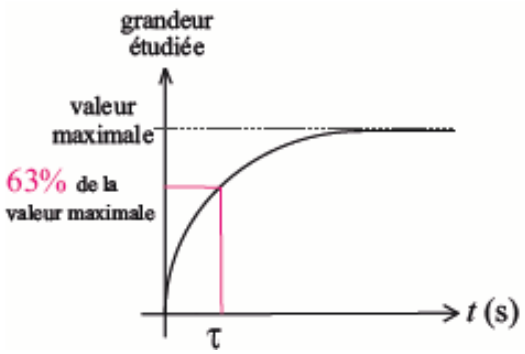
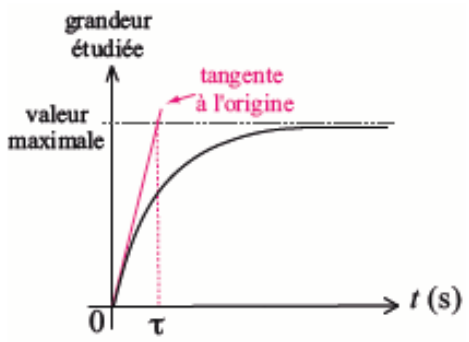
Les principaux résultats pour un circuit RL sont regroupés dans ce tableau, aussi bien concernant l'établissement du courant que sa rupture.

	Installation du courant	Rupture de courant
Schéma		
Mise en équation	$u_L + u_R - E = 0 \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri - E = 0$	$u_L + u_R = 0 \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = 0$
Équation différentielle	$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = \frac{E}{L}$ Équation du 1er ordre à coefficients constants avec second membre non nul	$\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L} = 0$ Équation du 1er ordre à coefficients constants avec second membre nul
C.I	$i(0) = 0$	$i(0) = I_0$

Constante de temps

La constante de temps, notée τ (*tau*), caractérise la rapidité de l'établissement du régime permanent.
Plus sa valeur est petite, plus le régime transitoire est court et le régime permanent atteint rapidement. On considère qu'au bout de , le régime permanent est atteint.

La constante de temps τ peut être déterminée de trois manières :

Par le calcul		Par la méthode des 63% de la valeur maximale atteinte	Par la méthode de la tangente à l'origine
Circuit RC $\tau = RC$	Circuit RL $\tau = \frac{L}{R}$		

Régimes libres du deuxième ordre

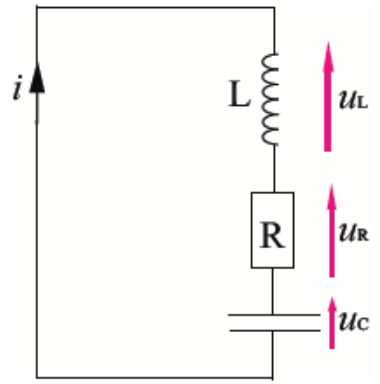
Circuit *R*, L, *C*

Courant de charge du condensateur

Avec les conventions d'orientation de la figure on a : $i = \frac{dq}{dt}$: $u_c = \frac{q}{C}$

La loi des mailles s'écrit: $u_c + u_R + u_L = 0 \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$



avec les conditions initiales

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

L'équation différentielle vérifiée par la charge du condensateur est du deuxième ordre à coefficients constants avec un second membre nul.

$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{LC} = 0$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \;\; et \;\; \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\lambda\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2\, u_c = 0$$

Régimes libres du deuxième ordre

Analogie électromécanique

Dans un circuit RLC, l'équation vérifiée par la charge q du condensateur et celle établie en mécanique pour l'oscillateur linéaire amorti sont semblables.

Grandeurs électriques		Grandeurs mécaniques	
E. différentielle vérifiée par q :	$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0$	E. différentielle vérifiée par x :	$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$
Conditions initiales	$\begin{cases} q(0)=q_0 \\ i(0)=0 \end{cases}$	Conditions initiales	$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ v(0)=0 \end{cases}$
Charge du condensateur	q en C	Élongation de la masse	x en m
Intensité du courant	$i=\frac{dq}{dt}$ en A		$v=\frac{dx}{dt}$ en m/s
Inductance propre	L en H	Masse	m en kg

Régimes libres du deuxième ordre

Analogie électromécanique

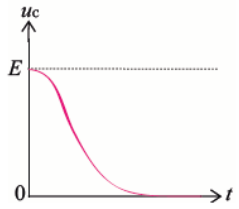
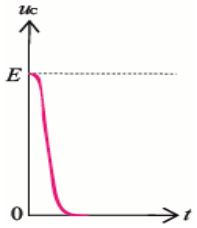
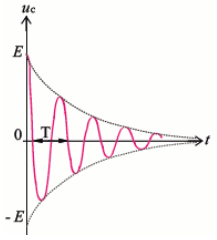
Grandeurs électriques		Grandeurs mécaniques	
Résistance du circuit	R en Ω	Coefficient de frottement	$f\ en\ \ N.s.m^{-1}$
Capacité du condensateur	$\frac{1}{C}\ \ en\ \ F^{-1}$	Constante de raideur	$k\ en\ kg.N.m^{-1}$
Pulsation propre	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Énergie magnétique	$E_c = \frac{1}{2}Li^2$	Énergie cinétique	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
Énergie électrique	$E_{élec} = \frac{1}{2C}q^2$	Énergie potentielle élastique	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Régimes libres du deuxième ordre

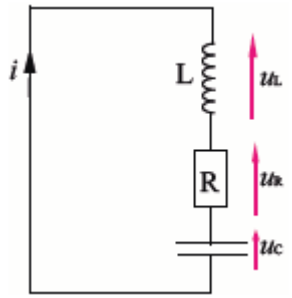
Les différents régimes libres

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2\, u_c = 0; \quad \text{En posant } u_c = Ae^{rt}$$

L'équation caractéristique est donnée par : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$; $\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$

Régime	Apériodique	Critique	Pseudo - périodique
Signe du discriminant	$\Delta' > 0$	$\Delta' = 0$	$\Delta' < 0$
Racines	$\begin{cases} r_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} \\ r_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} \end{cases}$	$r = -\lambda$ Racine double	$\begin{cases} r_1 = -\lambda - j\omega \\ r_2 = -\lambda + j\omega \end{cases}$ Avec $\omega^2 = -\Delta' = \omega_0^2 - \lambda^2$
Solution	$u_c(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$	$u_c(t) = (At + B)e^{rt}$	$u_c(t)$ $= [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{-\lambda t}$
Amortissement	fort	critique	faible
Tension u_c en fonction du temps			

Exemple:
Considérons la décharge d'un condensateur de capacité $C = 1\ \mu F$
dans un circuit série formé d'une inductance $L = 10\ mH$ et d'une résistance $R = 10\ W$



1) Déterminons la période propre T_0 de ce circuit :
2) Déterminons le régime de la décharge.
3) Effectuons le bilan énergétique lors de la décharge du condensateur.
4) Traçons l'énergie magnétique E_{mag}, l'énergie électrique E_{el} et l'énergie totale $E_{tot} = E_{el} + E_{mag}$.

Réseaux électrocinétiques: Régimes variables

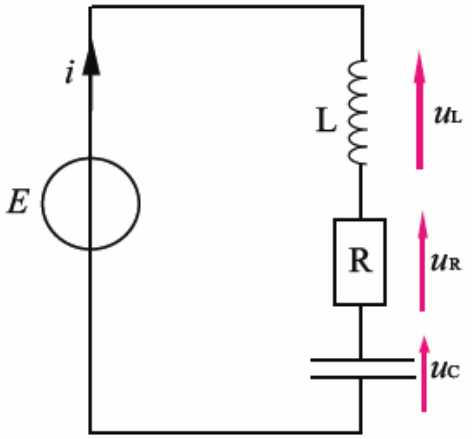
Circuit *R*, L, *C*

L'équation différentielle de la tension *u* aux bornes du condensateur d'un circuit *RLC* série soumis à un échelon de tension *E* est :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u=E \quad \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du}{dt}-\frac{u}{LC}=\frac{E}{LC}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2}+2\lambda\omega_0\frac{du}{dt}-\omega_0^2u=\omega_0^2E$$

$$ou \quad \frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}-\omega_0^2u=\omega_0^2E$$



$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$: est la pulsation propre du circuit *RLC*. Elle s'exprime en $rad\ s^{-1}$

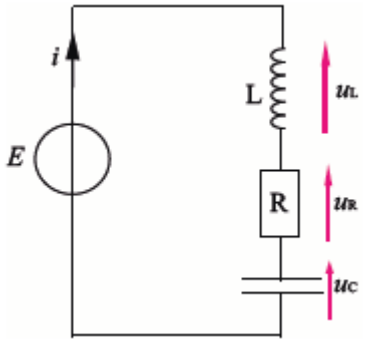
$T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{LC}$: est la période propre du circuit *RLC*. Elle s'exprime en s.

$\lambda=\frac{R}{2\,\omega_0 L}=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$: est le coefficient d'amortissement du circuit *RLC*

On définit aussi le facteur de qualité *Q* par: $Q=\frac{1}{2\sigma}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$:

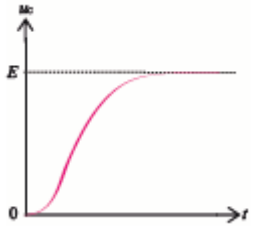
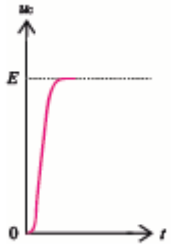
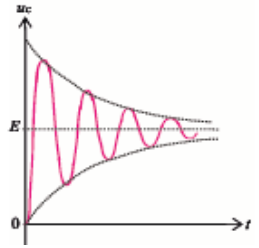
Exemple:

Étudions la charge du condensateur de capacité C à travers, une bobine d'inductance L et une résistance R à l'aide d'un générateur de tension continue de fem *E* (schéma ci-contre). Le circuit est fermé à $t = 0$.



1) Donnons l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$?

2) Donnons la solution de l'équation associé aux trois régimes?

Régime apériodique	Régime critique	Régime pseudo-périodique
$u_c(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$	$u_c(t) = (At + B)e^{rt} + E$	$u_c(t) = \mathrm{E} + [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]e^{-\lambda t}$
		

Régime sinusoïdal forcé

Dipôles linéaires en régime sinusoïdal forcé :

Un courant sinusoïdal: $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ traverse:

- **Une résistance R**

$$u_R = Ri = RI_m \cos(\omega t)$$

  - La tension aux bornes de la résistance est, à chaque instant, proportionnelle au courant.

- **Un condensateur C**

La relation entre u_c et $i(t)$

$$i = C\frac{du_c}{dt} \Leftrightarrow u_c = \frac{1}{C}\int i(t)dt = \frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t) = \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

  - La tension u_c est en retard de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant $i(t)$

- **Une inductance L**

La relation entre u_L et $i(t)$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -L\omega I_m \sin(\omega t) = L\omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

  - La tension u_L est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant $i(t)$

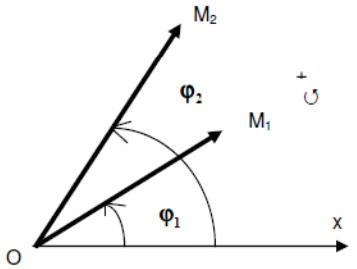
Différence de phase entre deux fonctions sinusoïdales de même période

Déphasage

On considère deux fonctions de même période et ayant par conséquent même ω :

$$x_1(t) = X_{1m}\cos(\omega t + \varphi_1) \;\; et \;\; x_2(t) = X_{2m}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

Ces fonctions sont déphasées : $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est le déphasage



Représentation de Fresnel

On représente les deux vecteurs de Fresnel associés à t =0

Au cours du temps, les deux vecteurs tournent à la même vitesse angulaire

Déphasages particuliers.

- Si $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in Z$, les deux fonctions sont en phase : (même valeur en même temps)
- Si $\varphi = (2k+1)\pi$ avec $k \in Z$, les deux fonctions sont en opposition de phase : l'une passe par la valeur maximale quand l'autre passe par sa valeur minimale mais elles s'annulent en même temps
- Si $\varphi = (2k+1)\pi/2$ avec $k \in Z$, les deux fonctions sont en quadrature de phase : l'une passe par la valeur maximale ou minimale quand l'autre passe par zéro

Régime sinusoïdal forcé

Loi d'Ohm complexe

Notation réelle	Notation complexe
$i(t) = I_m \cos(\omega t)$	$\underline{i}(t) = \underline{I} e^{\omega t}$ avec $\underline{I} = I_m$
$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\phi > 0$: tension en avance $\phi < 0$: tension en retard	$\underline{u} = \underline{U} e^{\omega t}$ avec $\underline{U} = U_m e^{\varphi}$

la tension complexe aux bornes :

du condensateur:

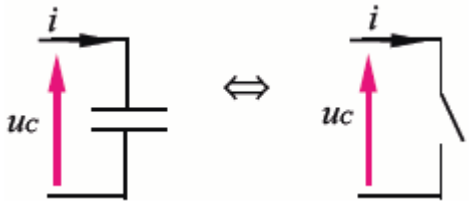
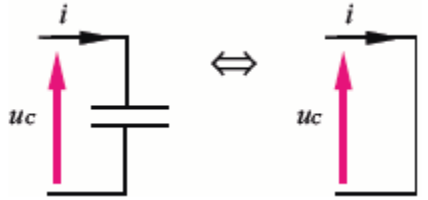
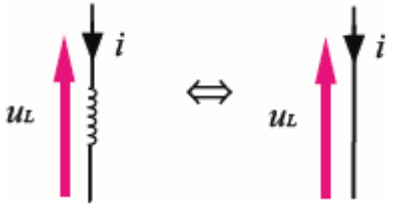
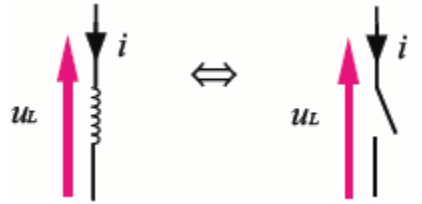
$$\underline{u_c} = \frac{I_m}{C\omega} e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{C\omega} I_m e^{(\omega t)} \Rightarrow \underline{u_c} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}(t)$$

d'une inductance

$$\underline{u_L} = L\omega I_m e^{\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)} = L\omega I_m e^{j\frac{\pi}{2}} I_m e^{(\omega t)} \Rightarrow \underline{u_L} = jL\omega\, \underline{i}(t)$$

Il y a donc proportionnalité entre la tension complexe $u(t)$ et l'intensité complexe $i(t)$.

Caractéristique dynamique courant-tension

Eléments	Expression de la tension et du courant sinusoïdaux	Comportement lorsque $\omega \rightarrow 0$	Comportement lorsque $\omega \rightarrow \infty$
Condensateur	$\underline{i} = C\dfrac{d\underline{u_c}}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{u_c} = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{i}(t)$	Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert 	Le condensateur se comporte comme un fil 
Inductance	$\underline{u_L} = L\dfrac{d\underline{i}}{dt}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{u_L} = jL\omega\,\underline{i}(t)$	L'inductance se comporte comme un fil 	L'inductance se comporte comme un circuit ouvert 

loi d'Ohm complexe

La loi d'Ohm complexe, en convention récepteur, s'écrit :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t)$$

$\underline{u}(t)$: tension complexe aux bornes du dipôle
$\underline{i}(t)$: intensité complexe traversant le dipôle
$\underline{Z}$: impédance complexe du dipôle

Impédances et admittances complexes

- **l'impédance complexe** d'un dipôle est:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R_z + jX_z$$

La partie réelle R_z est la ***résistance*** du dipôle; la partie imaginaire X_z est sa ***réactance***
L'impédance complexe s'écrit

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|\ e^{jArg(\underline{Z})} = Z\ e^{j\varphi};\ \ Z = |\underline{Z}| = \sqrt{{R_z}^2 + {X_z}^2}$$

- On défini **l'admittance complexe** du dipôle par $\underline{Z}$ le nombre complexe tel que :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

Impédances et admittances complexes

Le tableau regroupe les valeurs pour les dipôles linéaires élémentaires :

Dipôle	Résistance R	Condensateur C	Inductance L
Impédance complexe $\underline{Z}$	$\underline{Z} = R \Leftrightarrow \underline{Y} = \mathrm{G}$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega}$ $\Leftrightarrow \underline{Y} = jC\omega$	$\underline{Z} = jL\omega$ $\Leftrightarrow \underline{Y} = \dfrac{-\mathrm{j}}{C\omega}$
Impédance Z	$Z = \lvert\underline{Z}\rvert = R$	$Z = \dfrac{1}{C\omega}$	$Z = L\omega$
Argument de Z : φ	$\varphi = 0$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Lois de Kirchhoff

Par exemple, la loi des mailles s'écrit, en fonction des tensions complexes :

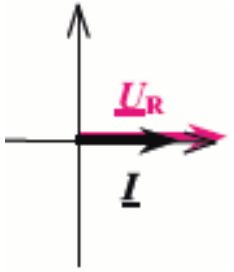
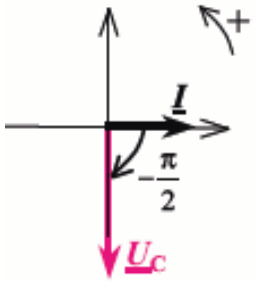
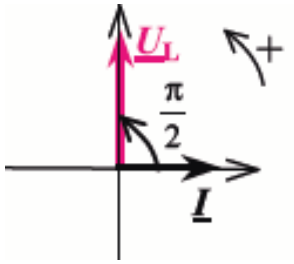
$$\underline{u}_{AD} = \underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC} + \underline{u}_{CD}$$

Toutes les tensions étant à la même pulsation, elle s'écrit aussi en fonction des amplitudes complexes des tensions :

$$\underline{u}_{AD} = \underline{u}_{AB} + \underline{u}_{BC} + \underline{u}_{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{U}_{AD} = \underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CD} \\ \underline{Z}_{AD} = \underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CD} \end{cases}$$

L'impédance complexe d'un ensemble de dipôles placés en série est la somme des impédances complexes de chacun des dipôles

Représentation de Fresnel

Dipôle	Résistance R	Condensateur C	Inductance L
amplitude complexe $\underline{U}$	$\underline{U} = RI_m$	$\underline{U} = \frac{I_m}{jC\omega} = \frac{-jI_m}{C\omega}$	$\underline{Z} = jL\omega I_m$
Représentation de Fresnel			
remarque	$i(t)\ et\ u_R(t)$ sont en phase.	$u_C(t)$ est en retard par rapport au courant $i(t)\ de\ -\frac{\pi}{2}$	$u_L(t)$ est en avance par rapport au courant $i(t)\ de\ \frac{\pi}{2}$

Puissance en régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal forcé, l'intensité et la tension varient au cours du temps. Les multimètres mesurent les tensions et les intensités efficaces. Ces notions d'intensité et de tension efficaces sont utilisées pour obtenir la puissance moyenne dissipée dans un dipôle.

Valeurs efficaces de grandeurs périodiques

L'intensité efficace se note I_{eff} et s'exprime en Ampère

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,(t)dt}$$

T est la période.

Valeurs efficaces de grandeurs périodiques

Exemple:

Si le courant est sinusoïdal, l'intensité s'écrit:

$$\mathrm{i}(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha)$$

valeur efficace I_{eff} est:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T (I_m \sin(\omega t + \alpha))^2\,dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

D'où

$$I_m = I_{eff}\sqrt{2} \Rightarrow \quad \mathrm{i}(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$$

$U = 230$ est une valeur efficace de $U_m = 230\sqrt{2}$

Puissance instantanée en régime variable

Considérons le dipôle ci-contre en convention récepteur.

La puissance instantanée dissipée par ce dipôle est:

$$p(t) = i(t)u(t)$$

Pour un courant et une tension sinusoïdaux de fréquence f

$$\begin{cases} i(t) = I_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t) \\ u(t) = U_{eff}\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$p(t) = 2\,I_{eff}U_{eff}\cos(\omega t)\cos(\omega t + \beta) \Leftrightarrow p(t) = I_{eff}\,U_{eff}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

La puissance instantanée est une fonction sinusoïdale de fréquence $2f$.

Puissance instantanée en régime variable

La puissance instantanée dissipée par ce dipôle est:

On a:

$$p(t) = I_{eff}\, U_{eff}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]$$

En utilisant la relation mathématique suivante:

$$\cos(2\omega t + \varphi) = \cos(2\omega t)\cos(\varphi) - \sin(2\omega t)\sin(\varphi)$$

$$p(t) = I_{eff}\, U_{eff}\cos(\varphi)\,[1 + \cos(2\omega t)] - I_{eff}\, U_{eff}\sin(2\omega t)\sin(\varphi)$$

Puissance active

$$I_{eff}U_{eff}\cos(\varphi)\,[1 + \cos(2\omega t)]$$

La puissance réactive

$$I_{eff}U_{eff}\sin(\varphi)\sin(2\omega t)$$

Puissance moyenne en régime sinusoïdal

- **La puissance moyenne**, notée P_{moy}, en W, est la moyenne sur une période T de la puissance instantanée.

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(I_{eff}U_{eff}[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]\right) dt \quad \Rightarrow P_{moy} = I_{eff}\,U_{eff}\cos(\varphi)$$

$\cos(\varphi)$ est appelé **facteur de puissance** du dipôle et est compris entre 0 et 1.

- **Puissance apparente et facteur de puissance.**
  - **La puissance apparente** consommée par un dipôle est définie par :

$$P_{app} = I_{eff}\,U_{eff}$$

  - **Facteur de puissance**

Noté f_p, il est défini par le rapport : $f_p = \frac{P_{moy}}{P_{app}}$

Attention ! Pour les régimes périodiques non sinusoïdaux, ce n'est pas un cosinus.

Puissance consommée par les Résistances

$$u(t) = Ri(t) \Leftrightarrow \quad P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)u(t)dt = \frac{R}{T}\int_0^T i(t)^2 dt$$

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)u(t)dt = \frac{1}{R\,T}\int_0^T u(t)^2 dt$$

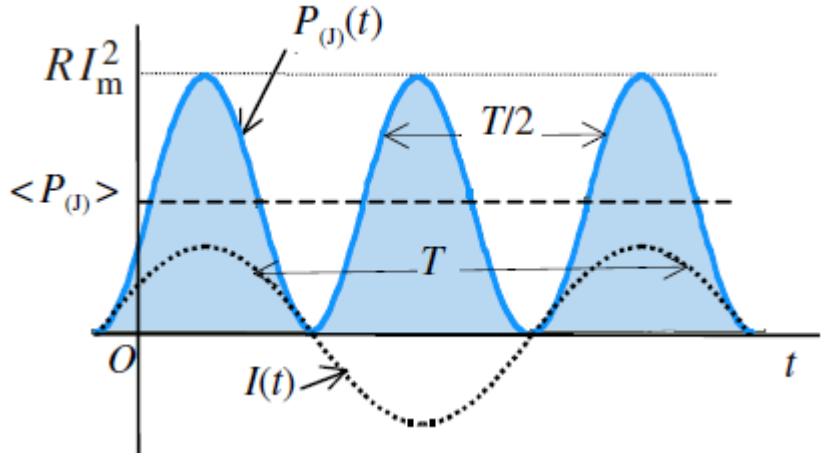
$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$P_{moy} = \frac{{U_m}^2}{R\,T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{{U_m}^2}{2R} \; et \;\; U_m = RI_m$$

$$P_{moy} = \frac{U_m I_m}{2}, U_m = U_{eff}\sqrt{2} \quad et \;\; I_m = I_{eff}\sqrt{2}$$

Ce qui permet d'écrire la puissance sous la forme

$$P_{moy} = I_{eff}U_{eff}$$



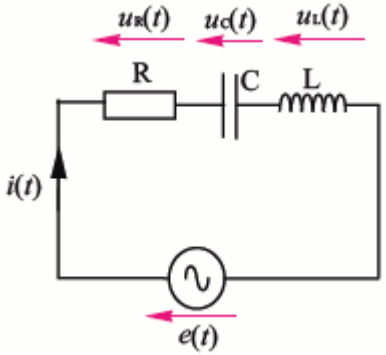
Résonances

En régime sinusoïdal forcé, dans un circuit RLC série, pour une certaine valeur de pulsation, nommée pulsation de résonance, l'amplitude de l'intensité est maximum. Ce phénomène s'appelle la résonance en intensité.

Impédance complexe du circuit RLC série

L'impédance complexe du dipôle série est la somme des impédances complexes de chaque élément

$$\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega$$



$$\Rightarrow \underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \Leftrightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

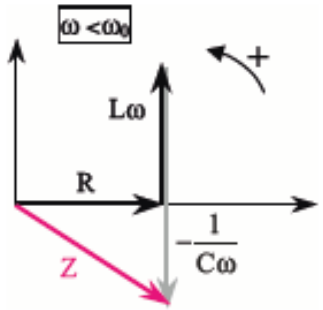
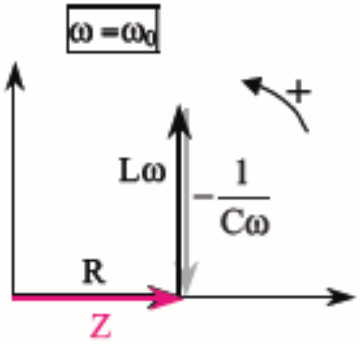
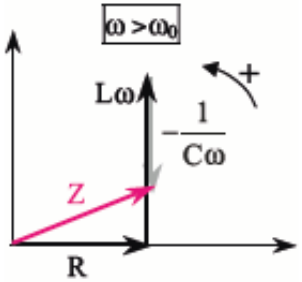
Cette impédance passe par un minimum pour une pulsation ω_0 vérifiant

$$L\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = 0 \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

C'est la pulsation propre du dipôle RLC

Représentons l'impédance complexe

Représentons l'impédance complexe dans le plan complexe (représentation de Fresnel)

		
L'effet capacitif l'emporte sur l'effet inductif.	Les effets capacitif et inductif se compensent ⇒ Z = R	L'effet inductif l'emporte sur l'effet capacitif

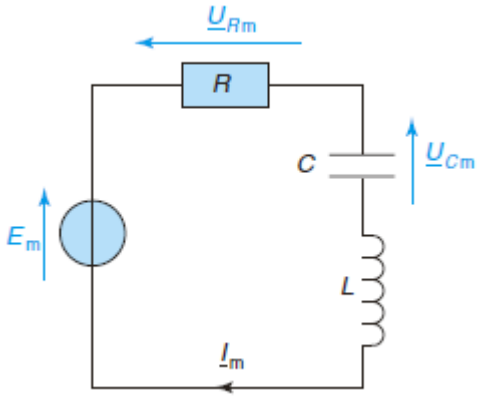
Étude d'un circuit *RLC*, résonances

$$u(t) = E_m\, cos(\omega t)$$

Résonance en intensité

Cherchons l'expression de i(t) sous la forme

$$i(t) = I_m\, cos(\omega t + \varphi)$$



En notation complexe

$$\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u} = \underline{U}e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I} = I_m e^{j\varphi} \text{ et } \underline{U} = U_m$$

La loi de Pouillet nous donne directement :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \Leftrightarrow I_m(\omega) = |\underline{I}| = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

La courbe représentant $I_m(\omega)$, l'amplitude de l'intensité du courant, s'appelle courbe de résonance en intensité.

$I_m(0) = 0$, $I_m(\infty) = 0$ *et* I_m**, positif,** cette courbe passe par un maximum pour une valeur de ω que l'on appellera ω_r la pulsation de résonance.

Références

- Classe prépa; **PCSI, MPSI, PTSI: Électrocinétique** Tout le cours
Auteurs: **Bernard Gendreau et Christophe Gripon**

- **Physique** 2e édition: **Mécanique, thermodynamique, électricité, ondes, optique**
Auteur: SOPHIE CANTIN-RIVIÈRE, CYRIL PAILLER-MATTEI, FRANÇOISE PERROT, ANNE-LAURE VALETTE

- LES NOUVEAUX Précis **Électrocinétique MPSI**
Auteur: **G . R O S S E T**

- **Électricité générale: Analyse et synthèse des circuits** Cours et exercices corrigés**,** 2e édition, Dunod, 2003.
Auteur: ***Tahar Neffati***